תרגיל 9

1. יהי R חוג gcd. הוכיחו: $(a^2,b^2)\sim 1 \implies (a,b)\sim 1$.

פתרון:

$(a,b)\sim 1$ ו $(a,b)\sim 1$, ולכן $(a,b^2)\sim 1$. (מתרגיל שעשינו בכיתה). כעת, $(a,b^2)\sim 1$ ו $(a,b^2)\sim 1$, ולכן $(a^2,b^2)\sim 1$.

2. בחוג gcd, לכל 3 איברים מתקיים: $(a,(b,c))\sim((a,b),c)$

פתרון:

נסמן $d_1=(a,(b,c)), d_2=((a,b),c)$. מהגדרה $d_1 \mid a,(b,c)$. לכן $d_1 \mid a,b,c$. מכאן, $d_1 \mid (a,b),c$. נובע מכך ש $d_1 \mid ((a,b),c)=d_2$. באופן דומה ניתן להוכיח ש $d_2 \mid d_1$. לכן $d_1\sim d_2$.

3. הוכיחו: כל תחום פריקות יחידה הוא חוג gcd

4. הגדרה: יהי R חוג, ו$a,b\in R$. נגיד שm הוא כפולה משותפת מינימלית של a,b (כמ"מ, lcm) אם $a,b|m$, ולכל c כך ש $a,b|c$ מתקיים: $m|c$. הוכיחו: m הוא כמ"מ של a,b אמ"ם $Ra\cap Rb=Rm$.

פתרון:

ראשית, נניח ש$m=[a,b]$. אזי $m \mid a,b$. לכן $Rm\subseteq Ra\wedge Rm\subseteq Rb$. מכאן: $Rm\subseteq Ra\cap Rb$. מצד שני, יהי $x\in Ra\cap Rb$. אז $x\mid a,b$. לכן $x\mid m$. כלומר, $x\in Rm$. מסקנה: $Ra\cap Rb=Rm$.

מצד שני

נניח $Ra\cap Rb=Rm$. אז ברור ש$m\mid a,b$. מצד שני, יהי x כך $x\mid a,b$. אז $x\in Ra\cap Rb$. מכאן ש$x\in Rm$. לכן $x\mid m$.

5. אם $[a,b]=m$ קיים אז (a,b) קיים והוא שווה ל$\frac{ab}{m}$.

(א) הוכחה: ברור ש$\frac{ab}{m} \mid a,b$. הסבר: $m\mid a,b$. לכן, למשל, $m=ac$. אז $\frac{ab}{m}=\frac{b}{c}\mid b$.
אם $x\mid a,b$ אז $\frac{ab}{x}\in Ra\cap Rb=Rm$. לכן $m \mid \frac{ab}{x}$. מכאן ש$\frac{ab}{m}\mid x$.

6. טענה: יהי R חוג gcd. אז $\frac{ab}{(a,b)}$ הוא כמ"מ.

(א) הוכחה: נניח ש$x \mid a, b$. צ"ל ש$x \mid \frac{ab}{(a,b)}$. נכתוב $x = ay$. אז $ay \mid b$ ולכן לפי תרגילים קודמים $b = (b, ya) = ((b, yb), ya) = (b, (ya, yb)) = (b, y(a, b))$.
לכן $ay(a, b) \mid ab$. קיבלנו ש $x = ay \mid \frac{ab}{(a,b)}$. הכיוון השני טריוויאלי.

7. אם $[b, c]$ קיים אז לכל $a \neq 0$, $[ab, ac]$ קיים ושווה ל$a[b, c]$.

(א) הוכחה: ברור ש$a[b, c] \mid ab, ac$. נניח ש$x \mid ab, ac$. נכתוב $x = abb' = acc'$. אז $\frac{x}{a} \mid b, c$ ולכן $\frac{x}{a} \mid [b, c]$. ו$x \mid a[b, c]$.