

תרגיל בית 3

לפעמים יש לנו מידה על קבוצה X עם σ -אלגברה כלשהי ואנו רוצים להסתכל רק על תת קבוצה של A , $B \subseteq A$. לדוגמא, אנו רוצים לצמצם את מידת לבג על הקטע $[0,1]$. על מנת לעשות זאת נוכיח שתי טענות.

1. תהי S סיגמא אלגברה על X ותהי B קבוצה מדידה ב S . הוכיחו כי $S_B = \{E \mid E = A \cap B, A \text{ is } S \text{ measurable}\}$ הינה סיגמא אלגברה על B . פתרון: נבדוק אם התנאים מתקיימים.

$$. i. X \in S \Rightarrow X \cap B = B \in S_B$$

$$. ii. E \in S_B \Rightarrow \exists A \in S \wedge E = A \cap B \Rightarrow A^c \in S \wedge A^c \cap B = B - E \in S_B$$

$$. iii. \{E_n\} \in S_B \Rightarrow \exists \{A_n\} \in S \wedge A_n \cap B = E_n \Rightarrow (\bigcup A_n) \cap B \in S_B$$

$$\Rightarrow \bigcup (A_n \cap B) = \bigcup E_n \in S_B$$

ומכאן ש S_B הינה סיגמא אלגברה.

2. הוכח כי אם (X, S, μ) הינו מ"ח, $B \in S$, ונגדיר $\nu(A) = \mu(A \cap B)$ עבור $A \in S$ אזי ν הינה מידה.

פתרון: נבדוק את התכונות הנדרשות ממידה.

$$. i. \nu(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap B) = \mu(\emptyset) = 0$$

$$. ii. \nu(A) = \mu(A \cap B) \geq 0$$

. iii. נניח כי $\{E_n\}$ סדרה של קבוצות זרות ב S , אזי

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(B \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap B)\right)$$

מכיוון ש E_n זרות נובע כי גם $B \cap E_n$ זרות ולכן, כיוון ש μ הינה מידה נקבל

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap B)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \cap B) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$$

3. יהי (X, S) מרחב מדיד ו μ הינה פונקציית קבוצות חיובית ואדיטיבית סופית וכך ש

$$\mu(\emptyset) = 0. \text{ נניח שאם } A_n \text{ הינה סדרת קבוצות עולה אז מתקיים } \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \text{ . הראו}$$

כי μ הינה מידה.

פתרון: מספיק להראות שאם $\{E_n\}$ סדרה של קבוצות זרות אזי מתקיים $\mu\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n \mu(E_n)$ (סיגמא –

אדיטיביות). נגדיר סדרה חדשה $F_n = \bigcup_{i=1}^n E_i$. זוהי סדרה עולה, ומתוך האדיטיביות הסופית של μ נובע כי

$$\mu(F_n) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i) \text{ מתקיים גם ש } \bigcup_{i=1}^\infty E_i = \bigcup_{i=1}^\infty F_i \text{ ולכן}$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty F_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(E_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(E_i)$$

4. יהיו $\mathcal{A}_1$ ו $\mathcal{A}_2$ שתי משפחות של קבוצות ב X . הראו כי אם $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1)$ אזי נובע כי $\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2)$.

פתרון: מכיון ש $\mathcal{A}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1)$ נובע כי

$$\sigma(\mathcal{A}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1) \text{ מכיון ש } \mathcal{A}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1) \text{ נובע כי הסיגמא אלגברה המינימלית שמכילה את } \mathcal{A}_2$$

$$\text{מוכלת ב } \sigma(\mathcal{A}_1) \text{, כלומר } \sigma(\mathcal{A}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1).$$

$$\sigma(\mathcal{A}_2) \supseteq \sigma(\mathcal{A}_1) \text{ נובע מכך ש } \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2.$$