הגדרה: תהי I קבוצה, ו$\langle \kappa_i \rangle_{i\in I}$ סדרה של מונים. אזי:

1. הסכום האינסופי $\sum_{i\in I} \kappa_i = |\bigcup_{i\in I} \kappa_i \times \{i\}|$
2. המכפלה האינסופית $\prod_i \kappa_i = |\{f : I \to \bigcup \kappa_i : \forall i \in I, f(i) \in \kappa_i\}|$

טענה: תהי I קבוצה ו$\{\kappa_i\}_{i\in I}, \{\lambda_i\}_{i\in I}$ קבוצות של מונים כך שלכל $i \in I$ מתקיים ש$\kappa_i <$ λ_i. אזי

$$\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i$$

הוכחה:

ראשית נראה $\sum_{i\in I} \kappa_i \le \prod_{i\in I} \lambda_i$. אנחנו צריכים לבנות פונקציה חח"ע $g : \sum_{i\in I} \kappa_i \to \prod_{i\in I} \lambda_i$ יהי $\alpha_i \in \kappa_i$.

$$g(\alpha_i, i)(j) = \begin{cases} \alpha_i & j = i \\ \kappa_j & j \ne i \end{cases}$$

הפונקציה חח"ע. אכן, נניח $(\alpha_i, i) \ne (\beta_j, j) \in \bigcup_{i\in I} \kappa_i \times \{i\}$. אם $i = j$, הפונקציות שנקבל יהיו שונות ברכיב הi. כי העובדה שהזוגות שונים תגיד ש$\beta_i \ne \alpha_i$. ו

$$g(\alpha_i, i)(i) = \alpha_i$$

$$g(\beta_i, i)(i) = \beta_i$$

אם $i \ne j$ אז הפונקציות יהיו שונות ברכיה בi כי

$$g(\alpha_i, i)(i) = \alpha_i$$

$$g(\beta_j, j)(i) = \kappa_i$$

ו$\alpha_i \in \kappa_i$ ולכן בהכרח $\alpha_i \ne \kappa_i$.

כעת בשביל להוכיח קטן ממש צריך להראות שאין פונקציה על. כלומר, לקחת פונקציה $g :$ $\sum_{i\in I} \kappa_i \to \prod_{i\in I} \lambda_i$ ולהוכיח שאינה על. אנחנו רוצים לבנות פונקציה $f : I \to \bigcup_{i\in} \lambda_i$ שלכל i $f(i) \in \lambda_i$, שתהיה שונה מ$g(\alpha, i)$ לכל $i \in I$ ו$\alpha \in \kappa_i$. נבנה f שתהיה שונה מ$g(\alpha, i)$ ברכיב הi.

$$A_i = \{g(\alpha, i)(i) : \alpha \in \kappa_i\}$$

$$|A_i| \le \kappa_i$$

לפי הנחה $\kappa_i < \lambda_i$ ולכן יש איבר בλ_i שלא שייך לA_i.

$$f(i) = \min \lambda_i \setminus A_i$$

בנינו פונקציה f שעונה על התנאים, לכל $(\alpha_i,i)\in\bigcup\kappa_i\times\{i\}$ $f\neq g(\alpha,i)$ כי הן שונות ברכיב הi, כי לפי הגדרה

$$f(i)\notin A_i=\{g(\alpha,i)(i):\alpha\in\kappa_i\}$$

מש"ל.

מסקנה: $\lambda<2^\lambda$ לכל מונה.

הוכחה: נגדיר $I=\lambda$, $\lambda_i=2$ לכל i ו$\kappa_i=1$. $2>1$ ו

$$\sum_\lambda 1<\prod_\lambda 2$$

$$\lambda<2^\lambda$$

טענה: יהי λ מונה אינסופי ו$\langle\kappa_i:i<\lambda\rangle$ סדרה של מונים גדולים מ0. נסמן $\kappa=\sup\kappa_i$. אז $\sum\kappa_i=\max\{\kappa,\lambda\}$

הוכחה: $\sum\kappa_i\leq\max\{\kappa,\lambda\}$:

לכל i, $\kappa_i\leq\sup=\kappa$. ולכן

$$\sum_\lambda\kappa_i\leq\sum_\lambda\kappa=\kappa\cdot\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$$

כיוון שני:

$$\lambda=\sum_\lambda 1\leq\sum\kappa_i$$

כעת נבנה פונקציה חח"ע $f:\kappa\to\bigcup_{i\in\lambda}\kappa_i\times\{i\}$

לכל $\alpha\in\kappa$, יש איזשהו κ_i מינימלי כך ש$\alpha\in\kappa_i$.

$$f(\alpha)=(\alpha,i)$$

ברור שזה חח"ע.

דרך נוספת לאי שוויון האחרון: ברור ש$\sum_{i\in\lambda}\kappa_i$ גדול שווה מכל κ_i בנפרד, ולכן מהגדרת הסופרימום בתור המונה הראשון שגדול שווה מכולם, נקבל ש$\kappa=\sup\kappa_i\leq\sum\kappa_i$

ולכן $\kappa\leq\sum_{i\in\lambda}\kappa_i$

ולכן $\max\{\kappa,\lambda\}\leq\sum_{i\in\lambda}\kappa_i$

מש"ל.

טענה: בהנחת השערת הרצף המוכללת (כלומר שלכל מונה אינסופי κ $\kappa^+=2^\kappa$), מתקיים שלכל שני מונים שלפחות אחד מהם אינסופי, וכן $\kappa>1$ ו$\lambda\geq 1$:

$$\kappa^\lambda=\begin{cases}\lambda^+ & \kappa\leq\lambda\\ \kappa^+ & cf(\kappa)\leq\lambda\leq\kappa\\ \kappa & \lambda<cf(\kappa)\end{cases}$$

הוכחה:

המקרה הראשון: $\lambda \leq \kappa$ הוכחנו בעבר שבסיטואציה הזאת $\kappa^\lambda = 2^\lambda$ אז בהנחת השערת הרצף המוכללת זה שווה לλ^+.

המקרה השני: $cf(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa$: הוכחנו ש$\kappa^{cf(\kappa)} > \kappa$. לכן

$$\kappa^\lambda \geq \kappa^{cf(\kappa)} \geq \kappa^+$$

מצד שני

$$\kappa^\lambda \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa = \kappa^+$$

לכן $\kappa^\lambda = \kappa^+$.

המקרה השלישי: מצד שאחד, $\kappa = \kappa^1 \leq \kappa^\lambda$.

בהרצאה הקודמת הוכחנו שκ^λ, כאשר $\lambda < \kappa$, שווה לעוצמת כל תתי הקבוצות של κ מעוצמה λ.

מכיוון ש$\lambda < cf(\kappa)$ כל תת קבוצה מעוצמה λ בתוך κ אינה קופינלית, כלומר יש איבר שגדול ממש מכל איברי הקבוצה. לכן כל תת קבוצה מעוצמה λ של κ מוכלת באיזשהו $\alpha \in \kappa$. אז כמה תתי קבוצות כאלה יכולות להיות?

לכל α מספר תתי הקבוצות שלו הוא $|P(\alpha)| = 2^{|\alpha|} = |\alpha|^+$. אבל $\alpha \in \kappa$ לכן $|\alpha| < \kappa$ אז $|\alpha|^+ \leq \kappa$.

מספר הסודרים α ששייכים לκ הוא כמובן κ. לכן מספר תתי הקבוצות מעוצמה λ הוא לכל היותר

$$\kappa \cdot \kappa = \kappa$$

לכן $\kappa^\lambda \leq \kappa$.

הגדרה: מונה κ יקרא "גבולי חזק" אם לכל $\lambda < \kappa$ מתקיים $2^\lambda < \kappa$.

דוגמא: ω הוא מונה גבולי חזק.

טענה: כל מונה גבולי חזק הוא גבולי.

הוכחה: יהי κ גבולי חזק. ויהי $\lambda < \kappa$. אז $\lambda^+ \leq 2^\lambda < \kappa$.

טענה: יהי κ מונה גבולי חזק. לכל $\lambda, \mu < \kappa$ מתקיים: $\mu^\lambda < \kappa$

הוכחה: $\mu < 2^\mu$ ולכן $\mu^\lambda \leq 2^{\mu\cdot\lambda}$. אם λ וμ שניהם סופיים אז $2^{\mu\cdot\lambda}$ סופי וκ בהכרח אינסופי כי הוא גבולי ולכן $\kappa < 2^{\mu\cdot\lambda}$. אם אחד מהם 0 אז $\kappa < 1 = 2^{\mu\cdot\lambda}$. ואם לפחות אחד מהם אינסופי ואף אחד מהם לא 0 אז $\mu\cdot\lambda = \max\{\mu,\lambda\}$ ו

$$\mu^\lambda = 2^{\max\{\mu,\lambda\}} < \kappa$$

פונקציית ה$\beth$:

הגדרה: $\beth_0 = \omega$

$\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$

עבור β גבולי $\beth_\beta = \sup_{\alpha<\beta} \beth_\alpha$

טענות:

1. לכל α מתקיים $\beth_\alpha = \aleph_\alpha$ אמ"ם השערת הרצף המוכללת. (הוכתם בש"ב)
2. הפונקציה $\beth$ שומרת סדר, והיא פונקציה רציפה.
3. לכל α יש לפונקציית ה$\beth$ נקודת שבת שגדולה מα מכל קופינליות אפשרית.

(רעיון ההוכחה: נבנה סדרה

$$a_0 = \alpha$$

$$a_{n+1} = \beth_{a_n}$$

$\alpha = \sup a_n$ יהיה נקודת שגדולה מα מקופינליות ω.

תרגיל: לכל α מתקיים $\alpha \le \aleph_\alpha \le \beth_\alpha$

טענה: לכל α גבולי, $\beth_\alpha$ היא מונה גבולי חזק.

הוכחה: יהי $\kappa < \beth_\alpha$. $\beth_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \beth_\beta$ לכן קיים $\beta < \alpha$ כך ש$\kappa < \beth_\beta$. אז $2^\kappa \le 2^{\beth_\beta} = \beth_{\beta+1} < \beth_\alpha$ כי α גבולי ולכן גדול ממש מ$\beta + 1$.

ואם $\alpha = 0$ אז $\beth_\alpha = \omega$ וכבר ראינו שהוא גבולי חזק.

אידיאלים, מסננים, סל"חים וכיוצא בזה

הגדרה: תהי A קבוצה. אידיאל I על A הוא תת קבוצה של $P(A)$ שמקיים:
1. סגור לאיחודים סופיים.
2. סגור כלפי מטה. כלומר, אם $B \in I$ ו$C \subseteq B$ אז $C \in I$
3. $\emptyset \in I$ (שקול להגיד ש$I \neq \emptyset$)

טענה: I הוא אידיאל של A אמ"ם הוא אידיאל של החוג $(P(A), \triangle, \cap, \emptyset, A)$

הוכחה: $\Leftarrow$ נניח שI אידיאל של A. אז צריך להוכיח שבחוג $(P(A), \triangle, \cap, \emptyset, A)$ הוא סגור ל"חיבור" כלומר הפרש סימטרי, יש בו את איבר ה0, ובולע.

איבר ה0 - מתכונה 3.

בליעה: נניח ש$B \in I$ ו$C \in P(A)$, אז $C \cap B \subseteq B$ ולכן $C \cap B \in I$.

סגירות לחיבור: נניח ש$B, C \in I$. אז $B \cup C \in I$ מתכונה 1. ו$B \triangle C \subseteq B \cup C$ ולכן מתכונה 3 שייך לI.

$\Longrightarrow$ נניח שI אידיאל בחוג. אז לפי הגדרה $\emptyset \in I$.

סגירות כלפי מטה: יהי $B \in I$ ו$C \subseteq B$ אז $C = C \cap B \in I$ מתכונת הבליעה.

סגירות לאיחודים סופיים: יהיו $B, C \in I$. אז $B \cup C = (B \triangle C) \triangle (B \cap C)$ שייך לI בגלל ש$B \cap C \in I$ מסגירות כלפי מטה, וכל השאר זה סגירות לחיבור.

הגדרה: תהי A קבוצה. מסנן על A, $\mathcal{F}$ הוא תת קבוצה של $P(A)$ שמקיימת:
1. סגירות לחיתוכים סופיים.
2. סגירות כלפי מעלה. (אם $B \in \mathcal{F}$ ו$B \subseteq C$ אז $C \in \mathcal{F}$)
3. $A \in \mathcal{F}$ (שקול להגיד ש$\mathcal{F} \neq \emptyset$)

טענה: תהי A קבוצה. I הוא אידיאל על A אמ"ם $\hat{I} = \{B^c : B \in I\}$ היא מסנן על A. זה נקרא "המסנן הדואלי לI"

הגדרה: מסנן נאות/ אידיאל נאות הוא מסנן. אידיאל שלא שווה לכל $P(A)$.

הגדרה: מסנן מקסימלי/ אידיאל מקסימלי הוא מסנן/ אידיאל שלא מוכל בשום מסנן/ אידיאל אחר.

טענה: אם $I_1 \subseteq I_2$ אז $\hat{I}_1 \subseteq \hat{I}_2$. ולכן I הוא אידיאל מקסימלי אמ"ם $\hat{I}$ מסנן מקסימלי.

טענה: כל מסנן נאות מוכל במסנן נאות מקסימלי.

הוכחה: נשתמש בלמה של צורן. יהי $\mathcal{F}$ מסנן. אנחנו רוצים להוכיח שבקבוצת המסננים שמכילים את $\mathcal{F}$, $X_{\mathcal{F}}$יש איבר מקסימלי, כאשר יחס הסדר הוא יחס ההכלה. ראשית, $X_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$ כי $\mathcal{F} \in X_{\mathcal{F}}$. בשביל להראות שקיים איבר מקסימלי, מספיק להוכיח שלכל שרשרת יש חסם מלעיל. החסם הולך להיות האיחוד. האיחוד בוודאי מכיל את כולם. נוכיח שאיחוד על פני שרשרת של מסננים הוןא מסנן וזה ייתן את הדרוש.

$$\mathcal{F}' = \bigcup \mathcal{F}_i$$

סגירות כלפי מעלה: יהי $B \in \mathcal{F}' = \bigcup \mathcal{F}_i$ ו$C \supseteq B$. אז קיים i כך ש$B \in \mathcal{F}_i$. $\mathcal{F}_i$ הוא מסנן ולכן $C \in \mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}' = \bigcup \mathcal{F}_i$.

סגירות לחיתוכים סופיים: יהיו $B, C \in \mathcal{F}' = \bigcup \mathcal{F}_i$. יש i וj כך ש$B \in \mathcal{F}_i, C \in \mathcal{F}_j$. בה"כ $i < j$ ולכן $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j$, אז $B, C \in \mathcal{F}_j$ ולכן $B \cap C \in \mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}' = \bigcup \mathcal{F}_i$.

$X \in \mathcal{F}'$ כי הוא נמצא בכל מסנן.

לבסוף, ברור ש$\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$.

הערה: במסנן נאות לא ייתכן שיש קבוצות $X_1, .., X_n$ שהחיתוך $X_1 \cap ... \cap X_n = \emptyset$, כי אז נקבל שקבוצה ריקה שייכת למסנן, ומסגירות כלפי מעלה כל $P(A)$ יהיה במסנן בסתירה לנאותות.

הגדרה: מסנן מקסימלי נקרא על- מסנן.

טענה: מסנן $\mathcal{F}$ הוא על-מסנן על A, אמ"ם מתקיימת התכונה הבאה: לכל $X \in P(A)$, מתקיים אחת מהבאים: $X \in \mathcal{F} \vee X^c \in \mathcal{F}$. שימו לב שלא ייתכן כי גם X וגם X^c יהיו ב$\mathcal{F}$ כי אז החיתוך שלהם יהיה, והחיתוך שלהם הוא קבוצה ריקה, ואם יש קבוצה ריקה אז בגלל הסגירות כלפי מעלה יהיה את כל $P(A)$ וזה כבר לא יהיה מסנן נאות.

הוכחה:$\Longleftarrow$ נניח ש$\mathcal{F}$ הוא על מסנן. יהי $X \in P(A)$. נניח בשלילה ש$X, X^c \notin \mathcal{F}$. נבנה מסנן שמכיל את $\mathcal{F}$ ואת X. נקח את כל הקבוצות שמכילות קבוצות מהצורה $X \cap B$ כאשר $B \in \mathcal{F}$.

למה זה מסנן?

$X \cap \emptyset = \emptyset$.

נניח ש$X \cap B \subseteq D_1, X \cap C \subseteq D_2$ אז $(X \cap B) \cap (X \cap C) \subseteq D_1 \cap D_2$

$(X \cap B) \cap (X \cap C) = X \cap (B \cap C)$

סגירות כלפי מעלה- ישירות מהגדרה.

בנינו מסנן שמכיל ממש את $\mathcal{F}$. למה הוא נאות? נב"ש $\emptyset$ במסנן שבנינו. אז יש $B \in \mathcal{F}$ כך ש$X \cap B = \emptyset$, זה אומר ש$B \subseteq X^c$, אבל אז מסגירות כלפי מעלה $X^c \in \mathcal{F}$- סתירה.

$\Longrightarrow$ נניח שלכל X מתקיים ש$X \in \mathcal{F}$ א $X^c \in \mathcal{F}$. רוצים להראות ש$\mathcal{F}$ מקסימלי. נניח שיש $\mathcal{G}$ שמכיל ממש את $\mathcal{F}$. אז יש $X \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$. אבל אז $X^c \in \mathcal{F}$, נקבל שב$\mathcal{G}$ יש את X וX^c ולכן $\mathcal{G}$ לא נאות.