מכינה למתמטיקה

מספרים רציונאליים ואי-רציונאליים. פעולות על קבוצות.

פתרונות ותשובות.

1. הוכח את הדיסטריבוטיביות של איחוד, חיתוך והפרש של קבוצות:

(א) $(A \setminus B)\bigcap C = (A\bigcap C)\setminus(B\bigcap C)$,

$x \in (A \setminus B)\cap C \to x \in (A \setminus B)\cap x \in C$

$\to (x \in A \cap x \notin B)\cap x \in C \Rightarrow$

$x \in C \Rightarrow x \in C \cap x \in C \Rightarrow (x \in A \cap x \notin B)\cap x \in C \cap x \in C \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \cap x \in C \cap x \notin B \cap x \in C \Rightarrow$

$\Rightarrow (x \in A \cap C)\cap(x \notin B \cap x \in C)$

אם $x \notin B$ $\Leftarrow$ $x \notin B \cap C$

$\Rightarrow (x \in (A \cap C))\wedge(x \notin (B \cap C))$

$\Rightarrow x \in (A \cap C)\setminus(B \cap C)$

הוכחנו ש $(A \setminus B)\cap C \subseteq (A \cap C)\setminus(B \cap C)$ נותר להוכיח ש

$(A\cap C)\setminus(B\cap C)\subseteq(A\setminus B)\cap C$

$x \in (A \cap C)\setminus(B \cap C) \to (x \in (A \cap C))\wedge(x \notin (B \cap C)) \to$

$(x \in A \cap C)\wedge\left(x \in \left(\overline{B \cap C}\right)\right)$

$\mathrm{x} \in \mathrm{A} \setminus \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{A} \wedge \mathrm{x} \notin \mathrm{B}$

$(A\cap C)\setminus(B\cap C)\subseteq(A\setminus B)\cap C$

$\to (x \in (A \cap C))\wedge\left(x \in \left(\overline{B \cap C}\right)\right)$

$de-morgan$

$(x \in A \cap C)\wedge\left(x \in \overline{B} \cup \overline{C}\right)$

$(x \in A \cap C)\wedge\left(x \in \overline{B} \vee x \in \overline{C}\right)$

$(x \in A \cap C)\wedge(x \notin B \vee x \notin C)$

$distribution$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B)\cup(A \cap C)$

$\overset{\text{פילוג}}{\Rightarrow}(x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B)\vee\underbrace{(x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin C)}_{\text{סתירה}}$

$\Rightarrow (x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in C$

$(x \in A \setminus B)\wedge(x \in C) \Rightarrow x \in (A \setminus B)\cap C$

ב) $\left(A \bigcup B\right) \setminus C = \left(A \setminus C\right) \bigcup \left(B \setminus C\right)$

$$x \in (A \cup B) \setminus C \Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin C \rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin C)$$
$$\rightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C)$$
$$x \notin (A \setminus C) \vee x \in (B \setminus C)$$
$$x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$
$$\supseteq x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \rightarrow x \in (A \setminus C) \vee x \in (B \setminus C)$$
$$\rightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C) \rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin C) \rightarrow$$
$$\rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin C$$

ג) $\left(A \bigcap B\right) \setminus C = \left(A \setminus C\right) \bigcap \left(B \setminus C\right)$,

$$\subseteq \; x \in (A \cap B) \setminus C \Rightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \notin C \rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \notin C)$$
$$\rightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \wedge (x \in B \wedge x \notin C)$$
$$x \in (A \setminus C) \wedge x \in (B \setminus C)$$
$$x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$$
$$\supseteq x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C) \rightarrow x \in (A \setminus C) \wedge x \in (B \setminus C)$$
$$\rightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \notin C) \rightarrow$$
$$\rightarrow x \in (A \cap B) \setminus C$$

ד) $\left(A \setminus B\right) \setminus C = \left(A \setminus C\right) \setminus \left(B \setminus C\right)$

$$\subseteq \; x \in (A \setminus B) \setminus C \Rightarrow x \in (A \setminus B) \wedge x \notin C \Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C$$
$$\overset{\text{חילוף}}{\Rightarrow} (x \in A \wedge x \notin C) \wedge x \notin B \Rightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \wedge (x \notin B \setminus C)$$
$$\Rightarrow x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$$
$$\supseteq \; x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) \Rightarrow x \in (A \setminus C) \wedge x \notin (B \setminus C)$$

$$\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \wedge (x \in \overline{B \setminus C}) \Rightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \wedge (x \in \overline{B \cap \overline{C}})$$
$$\overset{de-morgan}{\Rightarrow} (x \in A \wedge x \notin C) \wedge (x \in \overline{B} \cup C) \overset{\text{פילוג}}{\Rightarrow} (x \in A \wedge x \notin C \wedge x \in \overline{B}) \vee (x \in A \wedge \underset{\text{סתירה}}{x \notin C \wedge x \in C})$$
$$\overset{\text{חילוף}}{\Rightarrow} (x \in A \wedge x \in \overline{B}) \wedge (x \notin C) \Rightarrow (x \in A \setminus B) \wedge x \notin C \Rightarrow x \in (A \setminus B) \setminus C$$

2. הראה:

א) $A \bigcap B = A \setminus \left(A \setminus B\right)$,

לשים לב שכל ביטוי נכון לשני כיוונים, כעת נשתמש ב- $\Leftrightarrow$

$$x \in A \setminus (A \setminus B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge x \in (\overline{A \setminus B}) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in \overline{A \cap \overline{B}}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in \overline{A} \cup B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin A \vee x \in B) \overset{\text{פילוג}}{\Leftrightarrow} (x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B)$$
$$\Leftrightarrow 0 \vee (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in A \cap B$$

ב) $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\bigcup(A\bigcap C)$,

$$A\setminus(B\setminus C)=A\cap(\overline{B\setminus C})=A\cap(\overline{B\cap\overline{C}})\overset{de-morgan}{=}A\cap(\overline{B}\cup C)$$
$$\overset{\text{פילוג}}{=}(A\cap\overline{B})\cup(A\cap C)=(A\setminus B)\bigcup(A\bigcap C)$$

ג) $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\bigcup C)$,

$$(A\setminus B)\setminus C=(A\cap\overline{B})\cap\overline{C}\overset{\text{קיבוץ}}{=}A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})\overset{de-morgan}{=}A\cap(\overline{B\cup C})=A\setminus(B\bigcup C)$$

ד) $A\setminus(B\bigcup C)=(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C)$.

$$A\setminus(B\bigcup C)=A\cap(\overline{B\cup C})\overset{de-morgan}{=}A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})\overset{A=A\cap A}{=}A\cap\overline{B}\cap A\cap\overline{C}=$$
$$=(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C)$$

3. מצא את התנאים הכרחים ומספיקים על A ו- B כך שהטענות הבאות יהיו נכונות:

א) $(A\bigcup B)\setminus B=A$,

$A\bigcap B=\otimes$,

ב) $(A\setminus B)\bigcup B=A$,

$B\subset A$.

4. הוכח את כל אחת מהטענות הבאות:

א) $A\subset B\ \Rightarrow\ A\bigcap B=A, A\bigcup B=B$

(1) נראה ש- $A\bigcap B=A$

תמיד מתקיים $A\bigcap B\subseteq A$ לכן נראה ש- $A\bigcap B\supseteq A$ ז"א צריך להראות ש-

$\forall x\in A\Rightarrow x\in A\bigcap B$

נוכיח בדרך שלילה $\exists x\in A\wedge x\notin A\bigcap B$

$$x\in A\wedge(x\notin A\vee x\notin B)\overset{\text{פילוג}}{\Rightarrow}(x\in A\wedge x\notin A)\vee(x\in A\wedge x\notin B)\Rightarrow x\in A\wedge x\notin B$$

זאת בסתירה לעובדה ש- $A\subset B$

(2) נראה ש-

$A\cup B=B$

תמיד מתקיים $B\subseteq A\cup B$ לכן נראה ש- $A\cup B\subseteq B$ ז"א צריך להראות ש-

$\forall x\in A\cup B\Rightarrow x\in B$

נוכיח בדרך שלילה $\exists x\in A\cup B\wedge x\notin B$

$$(x\in A\vee x\in B)\wedge x\notin B\overset{\text{פילוג}}{\Rightarrow}(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin B)\Rightarrow(x\in A\wedge x\notin B)\vee 0$$
$$\Rightarrow(x\in A\wedge x\notin B)$$

זאת בסתירה לעובדה ש- $A\subset B$

ב) $A\bigcap B=A\Rightarrow\ A\subset B$

נוכיח בדרך שלילה $A\not\subset B\Rightarrow\exists x\in A\wedge x\notin B$

$A=A\cap B\ \Leftarrow\ A\subseteq A\cap B$ ז"א אם $x\in A\Leftarrow x\in A\cap B\Leftarrow x\in A\wedge x\in B$ בסתירה להנחה ש- $x\notin B$

ג) $A\bigcup B=B\ \Rightarrow\ A\subset B$.

נוכיח בדרך שלילה $A\not\subset B\Rightarrow\exists x\in A\wedge x\notin B$

$A\bigcup B=B\Leftarrow A\cup B\subseteq B$ ז"א אם $x\in A\cup B\Leftarrow x\in B$ בסתירה להנחה ש- $x\notin B$

5. האם מ- $A \setminus B = C$ נובע ש- $A = B \bigcup C$?
לא, מ- $A \setminus B = C$ רק נובע ש- $A \subset B \bigcup C$.
6. האם מ- $A = B \bigcup C$ נובע ש- $A \setminus B = C$?
לא, מ- $A = B \bigcup C$ נובע רק $A \setminus B \subset C$.
7. בדוק אלו מהשוויונות הבאים נכונים? אם לא, תקן אותם והחלף את השוויון ל"מכיל" בכיוון הנכון:
(א) $A \setminus (B \bigcup C) = (A \setminus B) \setminus C$,
כן, נכון.
(ב) $A \bigcup (B \setminus C) = (A \bigcup B) \setminus C$,
לא, רק $A \bigcup (B \setminus C) \supset (A \bigcup B) \setminus C$,
(ג) $(A \setminus B) \bigcup C = (A \bigcup C) \setminus B$,
לא, רק $(A \setminus B) \bigcup C \supset (A \bigcup C) \setminus B$.
8. הוכח שאם למשוואה

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

$$a_0, a_1, \ldots a_{n-1}, a_n \in Z,\ a_0 \neq 0,\ a_n \neq 0$$

יש שורש רציונאלי $\frac{p}{q}$ אז $a_n \vdots p$ ו- $a_0 \vdots q$.

<u>הוכחה:</u>

יהי $\frac{p}{q}$ שורש של משוואה (שורש מצומצם). נציב את $\frac{p}{q}$ במשוואה ונקבל

$$a_0 \frac{p^n}{q^n} + a_1 \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_2 \frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} \ldots + a_{n-1} \frac{p}{q} + a_n = 0$$

נכפיל את שני האגפים ב- q^n

$$(*) \quad a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + a_2 p^{n-2} q^2 \ldots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n = 0$$

(1) נחלק את (*) ב- p

$$a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} q + a_2 p^{n-1} q^2 \ldots + a_{n-1} q^{n-1} + \frac{a_n q^n}{p} = 0$$

$$a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} q + a_2 p^{n-1} q^2 \ldots + a_{n-1} q^{n-1} = -\frac{a_n q^n}{p}$$

אגף שמאל שייך ל-Z (קבוצת המספרים שלמים), לכן גם אגף ימין $-\frac{a_n q^n}{p} \in Z \Leftarrow$

או $a_n \vdots p$ או $q^n \vdots p$. אם $a_n \vdots p$ אז מש"ל.

אם $q \vdots p \Leftarrow q^n \vdots p$ בסתירה לכך ש- p ו- q זרים.

(2) נחלק את (*) ב- q

$$a_0 \frac{p^n}{q} + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} q \ldots + a_{n-1} p q^{n-2} + a_n q^{n-1} = 0$$

$$\frac{a_0 p^n}{q} = -a_1 p^{n-1} - a_2 p^{n-2} q \ldots - a_{n-1} p q^{n-2} - a_n q^{n-1} \in Z \Leftarrow \frac{a_0 p^n}{q} \in Z$$

p ו- q זרים לכן p ו- q^n זרים לכן $q \vdots a_0$.

9. הראה על סמך שאלה 8:

(א) $\sqrt{8}$ אינו מספר רציונאלי,

$x=\sqrt{8}$ הוא שורש של $x^2-8=0$. אם קיימים שורשים רציונליים אז הם $\pm 1, \frac{\pm 2}{1}, \frac{\pm 4}{1}, \frac{\pm 8}{1}$

ואלה אינם מקיימים את המשוואה, לכן $\sqrt{8} \notin Q$

(ב) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ אינו מספר רציונאלי.

$x=\sqrt{2}+\sqrt{3}, x^2=2+3+2\sqrt{6}, x^2=5+2\sqrt{6}, x^2-5=2\sqrt{6}$

$(x^2-5)^2=(2\sqrt{6})^2, x^4-10x^2+1=0$

שורשים רציונליים היחידים הם 1 ו-1- ואלה אינם מקיימים את המשוואה, לכן $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin Q$

דרך נוספת:

נניח בשלילה כי $\sqrt{2}+\sqrt{3} \in Q$

מתקיים $Q \ni \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$ כיחס של שני מספרים רציונליים 1 ו- $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$Q \ni \sqrt{2}=\frac{1}{2}((\sqrt{3}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{2}))$ כי סכום, הפרש, חילוק ומכפלה של מספרים רציונליים הוא מספר רציונלי. בהרצאה הוכח כי $\sqrt{2} \notin Q \Leftarrow$ סתירה. לכן $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin Q$.