מבוא לטופולוגיה - תרגיל 2

שאלה 1

הגדרה. יהיה M מרחב מטרי הסדרה $x_n \in M$ נקראת *קבועה לבסוף* אם קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ וקיים $a \in M$ כך ש-

$n \geq n_0 \Rightarrow x_n = a$.

א' תוכיחו שסדרה קבועה לבסוף מתכנסת.

ב' תהי x_n סדרה במ"מ (M,d) המתכנסת ל-x. יהיה קיים $\varepsilon_0 > 0$ כך שלכל $m \neq n$ מתקיים $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon_0$.

תוכיחו ש-x_n קבועה לבסוף.

ג' תהי x_n סדרה במ"מ (M,d) המתכנסת ל-x. תהי $\{x_n\}$ קבוצה סופית . תוכיחו ש-x_n קבועה לבסוף.

שאלה 2

תהי x_n סדרת קושי במ"מ (M,d). תהי x_{n_i} תתסדרה שלה כך ש- $x_{n_i} \to a$. תוכיחו שגם $x_n \to a$.

שאלה 3

הגדרה. תתקבוצה A של מ"מ (M,d) נקראת *חסומה* אם קיים כדור $B(x_0, R)$ כך ש- $A \subseteq B(x_0, R)$.

הגדרה. סדרה x_n במ"מ (M,d) נקראת *חסומה* אם קבוצת איבריה חסומה.

תוכיחו שסדרת קושי חסומה.

שאלה 4

יהיה M מרחב מטרי .

א' יהיו $a \in M$ ו- $f: M \to \mathbb{R}$ - פונקציה כך שלכל $x \in M$: $f(x) = d(x, a)$.

להוכיח ש-f פונקציה רציפה.

ב' יהיו $f, g: M \to \mathbb{R}^n$ פונקציות רציפות כאשר מטריקה ב-$\mathbb{R}^n$ אוקלידית.

להוכיח ש- $f + g$ פונקציה רציפה.