בוחן – אלגברה לינארית 1

סמסטר א׳, תשע״ו

פרטי הקורס

מספר הקורס: 88-112-01.
שם המרצה: ד״ר אלי מצרי.
שם המתרגל: גיא בלשר.

פרטי הבוחן

משך הבוחן: שעה וחצי (ללא תוספת זמן).
חומר עזר מותר לשימוש: מחשבון פשוט.

הנחיות כלליות

- **אנא כתבו על מחברת הבחינה שם ומספר ת״ז.**
- יש לענות על כל השאלות ועל כל הסעיפים בכל שאלה.
- ענו בפירוט על כל שאלה, והציגו את כל חישוביכם (גם אם לא נכתב במפורש בשאלה). עדיף לפרט יתר על המידה מאשר לא לפרט כלל.
- אנא התחילו את התשובה לכל שאלה בעמוד נפרד.
- מותר להשתמש ב**כל** משפט שלמדתם בהרצאה, אך יש לצטט כל משפט שאתם משתמשים בו.
- אנא כתבו את תשובותיכם בעט שחור או כחול.

הנחיות לגבי הבוחן

- הבוחן מכיל שלוש שאלות. ניקוד כל שאלה מופיע בסופה.
- בבוחן יש בסך הכל 110 נקודות, אך כל ציון בבוחן מעל 100 יתעגל אוטומטית ל-100.
- השאלות אינן מסודרות לפי רמת קושי; מומלץ לעבור ראשית על השאלות ולהתחיל בשאלות שאתם יודעים לפתור. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

השאלות

שאלה 1. נתונה מערכת המשוואות הבאה מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x & + & (2-a)\,y & & & = & 0 \\ (a+1)\,x & + & (2-2a)\,y & + & (3-2a)\,z & = & 3-2a \\ -x & + & y & + & (a-2)\,z & = & 1 \end{cases}$$

א. מצאו לאילו ערכי $a \in \mathbb{R}$:

- יש למערכת פתרון יחיד.
- אין למערכת פתרון.
- יש למערכת אינסוף פתרונות. במקרה זה, רשמו את הפתרון הכללי של המערכת.

(25 נקודות)

ב. נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. קבעו האם A הפיכה. אם קבעתם שכן – מצאו את A^{-1}. אם קבעתם שלא – נמקו. (15 נקודות)

רמז: עשוי להיות קשר לסעיף הקודם.

פתרון.

א. נכתוב את המערכת במטריצה ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2-a & 0 & 0 \\ a+1 & 2-2a & 3-2a & 3-2a \\ -1 & 1 & a-2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3+R_1\to R_3]{R_2-(a+1)R_1\to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2-a & 0 & 0 \\ 0 & a^2-3a & 3-2a & 3-2a \\ 0 & 3-a & a-2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2-a & 0 & 0 \\ 0 & 3-a & a-2 & 1 \\ 0 & a^2-3a & 3-2a & 3-2a \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+aR_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2-a & 0 & 0 \\ 0 & 3-a & a-2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4a+3 & 3-a \end{array}\right)$$

והגענו לצורה מדורגת. הערכים החשודים הם $a = 1, 3$.

כשמציבים $a = 1$, מקבלים שהמטריצה המדורגת היא $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$, ויש שורת סתירה בשורה האחרונה. לכן אין פתרון.

כשמציבים $a = 3$, מקבלים שהמטריצה המדורגת היא $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. יש שורת אפסים ואין שורת סתירה, ולכן יש אינסוף פתרונות. המשתנה החופשי הוא y; נסמן $y = t$, ונקבל שהפתרון הכללי הוא $\{(t,t,0) | t \in \mathbb{R}\}$.

לסיכום:

- עבור $a \neq 1, 3$, יש פתרון יחיד למערכת.
- עבור $a = 1$, אין פתרון למערכת.

- עבור $a=3$, יש אינסוף פתרונות למערכת, והפתרון הכללי הוא $\{(t,t,1)|t\in\mathbb{R}\}$.

ב. **דרך ראשונה:** נשים לב כי המטריצה A היא מטריצת המקדמים של המערכת, כאשר מציבים $a=2$. נסתכל על המטריצה המדורגת שקיבלנו (בלי עמודת הקבועים):

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

כלומר, אם נפעיל את הפעולה $-R_3\to R_3$, נקבל את מטריצת היחידה.
כלומר, אם נפעיל על A את הפעולות הבאות לפי הסדר, נקבל את מטריצת היחידה:

- $R_2-3R_1\to R_1$.
- $R_3+R_1\to R_3$.
- $R_2\leftrightarrow R_3$.
- $R_3+2R_2\to R_3$.
- $-R_3\to R_3$.

לפי אלגוריתם גאוס-ז'ורדן, המטריצה A הפיכה, ואם נפעיל את הפעולות האלו לפי הסדר על I, נקבל את A^{-1}. נפעיל אותן:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3+R_1\to R_3]{R_2-3R_1\to R_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\-3&1&0\end{pmatrix}\to$$

$$\xrightarrow{R_3+2R_2\to R_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\-1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{-R_3\to R_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&-1&-2\end{pmatrix}$$

לכן $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&-1&-2\end{pmatrix}$.

דרך שנייה: לדרג מחדש את $(A\mid I)$. אמור לצאת אותו דבר. אבל צריך להסביר בסוף מדוע המטריצה אינה הפיכה: "ראינו שהצורה המדורגת קנונית של A היא I, ולכן, לפי משפט מההרצאה, A הפיכה".

שאלה 2. בשאלה זו אין קשר בין הסעיפים.

א. יהי $\mathbb{F}$ שדה, תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה שאינה סימטרית, ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$.
הוכיחו: אם $\alpha A+\beta A^t$ סימטרית, אזי $\alpha=\beta$. (15 נקודות)

ב. תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית, ונניח שמתקיים $A^3-2A^2-A+2I=0$.
כמה פתרונות יש למערכת $Ax=0$? נמקו. (25 נקודות)

הוכחה.

א. נניח ש-$\alpha A+\beta A^t$ סימטרית. לכן,

$$\alpha A+\beta A^t=\left(\alpha A+\beta A^t\right)^t=\alpha A^t+\beta\left(A^t\right)^t=\alpha A^t+\beta A$$

נעביר אגפים, ונקבל

$$\begin{aligned}\alpha A-\alpha A^t-\beta A+\beta A^t &= 0\\ \alpha\left(A-A^t\right)-\beta\left(A-A^t\right) &= 0\end{aligned}$$

נסמן $B=A-A^t$. מהמשוואה נקבל

$$\alpha B-\beta B=0$$

כלומר $(\alpha-\beta)B=0$. לפי הנתון, A אינה סימטרית, ולכן $B\neq 0$; מכאן שמתקיים $\alpha-\beta=0$, כלומר $\alpha=\beta$.

ב. **דרך ראשונה:** נעביר אגפים ונקבל $A^3-2A^2-A=-2I$, כלומר $A\left(A^2-2A-I\right)=-2I$. ברור ש-$-2I$ היא מטריצה הפיכה, ולכן גם $A\left(A^2-2A-I\right)$ הפיכה.
לפי משפט מההרצאה, A ו-A^2-2A-I הפיכות.
כיוון ש-A הפיכה, נקבל שלמערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד.
דרך שנייה: נניח כי $Ax=0$. נכפול את המשוואה הנתונה ב-x מימין, ונקבל:

$$\begin{aligned}\left(A^3-2A^2-A+2I\right)x &= 0x\\ A^3x-2A^2x-Ax+2Ix &= 0\end{aligned}$$

כיוון ש-$Ax=0$, גם $A^2x=0$ וגם $A^3x=0$. כמו כן, $Ix=x$. לכן, המשוואה הנ"ל הופכת להיות $2x=0$. כיוון שאנחנו מעל $\mathbb{R}$, אפשר לחלק ב-2, ולקבל $x=0$.
לכן, למערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד.

$\square$

שאלה 3. תהי $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ מטריצה אנטי-סימטרית.

א. נניח כי

$$A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

האם ניתן לקבוע את הערך של $a+b+c$? נמקו. (15 נקודות)

רמז: עבור מטריצה כלשהי $B\in\mathbb{R}^{3\times 3}$, מהו $B\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$?

ב. נניח כי

$$A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}$$

חשבו את סכום האיברים בעמודה השלישית של A. (15 נקודות)

הוכחה.

א. ראשית, נניח כי $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ היא מטריצה כלשהי. נשים לב כי

$$B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{pmatrix}$$

כלומר, אחרי הכפל של B ב-$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, נקבל וקטור שבו האיבר ה-i-י הוא סכום השורה ה-i-ית של B.
מכאן נובע ש-a הוא סכום השורה הראשונה של A, b הוא סכום השורה השנייה של A ו-c הוא סכום השורה השלישית של A. לכן $a+b+c$ הוא סכום כל האיברים במטריצה A.
אבל A אנטי-סימטרית. מעל $\mathbb{R}$ הוכחנו בתרגול שאיברי האלכסון של מטריצה אנטי-סימטרית הוא 0, וכל איבר שאינו על האלכסון a_{ij} עבור $i \neq j$ מצטמצם עם a_{ji} (כי $a_{ji} = -a_{ij}$).
בסך הכל, בהכרח $a+b+c=0$.
כלומר, סכום העמודה השלישית הוא -1.

ב. לפי הנתון, הסכום של השורה השלישית של A הוא 1. אצלנו A אנטי-סימטרית, ולכן $a_{13} = -a_{31}$, $a_{23} = -a_{32}$, $a_{33} = 0$ (כי אנחנו מעל $\mathbb{R}$). לכן,

$$a_{13} + a_{23} + a_{33} = -\left(a_{31} + a_{32} + a_{33}\right) = -1$$

□