תרגול 8 – טופולוגיה

**תזכורת**

בבית הוכחתם את הטענה הבאה:

תהי הומיאומורפיזם. תהי  ת"ק כלשהי. אזי מתקיים .

למעשה ניתן להוכיח שההכלה  מתקיימת גם אם דורשים רק את הרציפות של הפונקציה.

**מסקנה**

תהי  פונקציה רציפה **ועל**, ותהי  צפופה. אזי  צפופה ב- (בפרט: הומאומורפיזם מעביר קבוצה צפופה ב- לקבוצה צפופה ב-).

הוכחה

 ולכן .

מש"ל

הגדרה

מרחב טופולוגי  נקרא **קשיר מסילתית** אם לכל  קיימת פונקציה רציפה  כך ש-. במקרה זה  נקראת "מסילה מ- ל-".

תזכורת

ראיתם בכיתה משפט שאם מרחב קשיר מסילתית אזי הוא קשיר (וראיתם גם דוגמה נגדית לכיוון ההפוך).

הגדרה

תהי  קבוצה במרחב ווקטורי כלשהו. נאמר ש-**קמורה** אם לכל  ולכל  מתקיים .

**טענה**

יהי  מרחב נורמי (כאשר  מרחב ווקטורי). תהי  קבוצה קמורה. אזי , כתת מרחב, קשיר מסילתית.

**"הוכחה"**

המסילה שעושה את העבודה היא הקו הישר בין שתי הנקודות. בדקו בבית שהיא אכן רציפה.

דוגמה

בכל מרחב נורמי כדור (פתוח או סגור) הוא קבוצה קמורה. לכן כדור במרחב נורמי הוא קשיר מסילתית ולכן קשיר.

**תרגיל**

יהי מ"ט ויהי  תת מרחב קשיר.

הוכיחו או הפריכו:  קשיר.

פתרון

דוגמה נגדית: נתבונן ב -  ונבחר שתי קבוצות: . אלה שני עיגולים עם רדיוס אחד אשר משיקים בנקודה . הכדור הוא קבוצה קמורה, כל קבוצה קמורה היא מרחב קשיר מסילתית (ולכן קשיר). מכאן  תת-מרחבים קשירים, ומכיוון שחיתוכם אינו ריק (לפי משפט מההרצאה)  הוא תת מרחב קשיר.

מצד שני  הוא איחוד של שני עיגולים (ללא השפה) זרים. מכאן שהפנים אינו קשיר (מדוע? מה הפירוק? הפירוק אמור להיות ברור להם; אין צורך לפרט.)

מש"ל

**משפט** (בהרצאה הוכחתם גרסה כללית יותר)

יהי  מ"ט. יהיו  תת-מרחבים קשירים מסילתית ונניח ש- אזי  קשיר מסילתית.

**תרגיל /מסקנה**

הוכיחו שלכל  המרחב  הינו קשיר מסילתית.

**פתרון**

יהיו  אזי  וכן  ולכן שני המרחבים קשירים מסילתית,  ולכן לפי המשפט  קשיר מסילתית.

מש"ל

**תרגיל**

הוכיחו או הפריכו:

1. ;
2.  עבור .

פתרון

1. ראיתם בכיתה שכל הקטעים הפתוחים הומאומורפיים בינהם, כל הסגורים הומאמורפיים בינהם (אך לא הומאומורפיים לפתוחים), וכל החצי פתוחים-חצי סגורים הומאומורפיים בינהם. לשם התרגול נמצא את ההומאומורפיזם המפורש: פונקציה המוגדרת ע"י . קל לראות שזאת פונקציה רציפה וההופכית שלה היא היא עצמה.
2. נניח בשלילה ש-ולכן קיים הומאומורפיזם . תהי  אזיהפונקציההיא הומאומורפיזם (צמצום התחום והטווח סימולטנית שומר על הומיאומורפיזם). אך . בשיעורי בית אתם מוכיחים ש- אינו הומיאומורפי ל-, ולכן זאת סתירה ואין הומאומורפיזם כנ"ל.

מש"ל

**תרגיל**

נתבונן בגרף של הפונקציה . האם זהו מרחב קשיר? האם הוא קשיר מסילתית? מצאו את מרכיבי הקשירות ואת מרכיבי הקשירות המסילתית.

פתרון

 ודאי רציפה. עפ"י מה שהראינו בעבר ומכאן הגרף אינו קשיר (ולכן גם לא קשיר מסילתית).

ב-  יש שני מרכיבי קשירות: . הם מרכיבי קשירות כי הוכחתם בכיתה שכל הקטעים ב- הם קשירים ואלה הם התת-מרחבים הקשירים היחידים של .

קשירות מסילתית: בגלל ש- פתוחה, לפי טענה שראיתם בכיתה – מרכיבי הקשירות מתלכדים עם מרכיבי הקשירות המסילתית.

[הערה לנו: הנה הטענה שהם ראו בכיתה. אם  תת קבוצה פתוחה אז מרכיבי הקשירות המסילתית של  (כתת מרחב) פתוחים. מכאן נובע שמרכיבי הקשירות המסילתית של  מתלכדים עם מרכיבי הקשירות (זאת לא נביעה מיידית.. טל עשה קצת עבודה בדרך). לכן,  קשיר אמ"מ הוא קשיר מסילתית.]

מש"ל