

תרגיל 12

להגשה ב־ד' שבט (15.01) או ו' שבט (17.01) - כל אחד בקבוצת התרגול שלו.

1. תהא $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & -8 \\ -16 & 10 & 7 \end{pmatrix}$ חשב את הפולניום האופייני של A ובעזרת משפט קיילי המילטון חשב את A^{-1}

2.

(א) תהא $A = \begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ לכל $i \neq j$ $a_i \neq a_j$ הוכח: A לכסינה.

(ב) תרגיל: הוכח ש $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ מטריצות דומות (היעזר בסעיף א', אין צורך בחישובים).

3. לכסן א"ג את $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ פרק את A בשיטת SVD

5. תהא $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ממשית. יהא $A = U\Sigma V^t$ פירוק ה SVD שלה.

(א) מצא את פירוק ה SVD של A^t , AA^t , AA^t (כן, ניתן לעשות פירוק SVD גם למטריצות סימטריות - חשבו מה יוצא).
השלם:

(ב) המטריצה V מורכבת מו"ע א"נ של _____

(ג) המטריצה U מורכבת מו"ע א"נ של _____

(ד) המטריצה $\Sigma \Sigma^t$ מורכבת מ _____ של _____

(ה) המטריצה $\Sigma^t \Sigma$ מורכבת מ _____ של _____

(ו) נניח שהפירוק הוא
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
 מצא בסיסים ל $N(A)$, $C(A)$

תזכורת:

הגדרה: תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ סימטרית. A תקרא חיובית (חיובית לחלוטין) אם לכל $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ מתקיים $\langle Av, v \rangle = v^t A v > 0$ (מתקיים $\langle Av, v \rangle = v^t A v \geq 0$ משפט: A חיובית $\Leftrightarrow$ כל e_i $0 \leq$

6. האם כל מטריצה A סימטרית ממשית שכל מקדמיה חיובים (כלומר $(A)_{ij} \geq 0$) בהכרח מטריצה חיובית?

7.

(א) האם כל מטריצה ממשית סימטרית $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ היא מטריצה מהצורה $A^t A$ עבור A מטריצה כלשהיא

(ב) האם כל מטריצה ממשית סימטרית וחיובית $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ היא מטריצה מהצורה $A^t A$ עבור A מטריצה כלשהיא (הדרכה: חשוב על ליכסון A "ג")

בהצלחה!