תרגיל 7

1. הגדרנו בתרגול את הסודר הבא: $\alpha = \lim a_n$, כאשר a_n מוגדרת ברקורסיה: $a_0 = 1, a_{n+1} = \omega^{a_n}$. הוכיחו: לכל סודר β שמקיים $\omega^\beta = \beta$, מתקיים: $\alpha \leq \beta$.
הוכחה:

יהי $\alpha > \beta$, נוכיח שלא מתקיים: $\omega^\beta = \beta$.

ובכן, מאחר ש$\alpha = \lim a_n$, נקבל שקיים איזשהו n כך ש $\beta < a_n$. יהי nהמספר הראשון שמקיים זאת.

אם $n = 0$: אז $a_0 = 1$, ונקבל $\beta = 0$. אכן, $\omega^0 = 1 \neq 0$.

אחרת, $a_{n-1} \leq \beta < a_n$. מכאן נקבל: $a_n = \omega^{a_{n-1}} \leq \omega^\beta$. אבל $\beta < a_n$, ולכן $\beta < \omega^\beta$.

2. תהי $\{a_n\}$ סדרה עולה של סודרים. הכיחו ש$a_n \to \sup\{a_n\}$ לפי טופולוגיית הסדר.
הוכחה:

ראשית, לשם הנוחות, נסמן $\beta = \sup\{a_n\}$.

לפי מה שראינו בתרגול β סודר גבולי. תהי U סביבה בסיסית של β. ראינו שכל סביבה בסיסית שמכילה את סודר גבולי, מכילה קבוצה מהצורה $(\gamma, \beta + 1)$ כאשר $\gamma < \beta$. מכיוון ש$\beta = \sup\{a_n\}$, נקבל שקיים איזשהו N כך ש $\gamma < a_N$. אבל הסדרה עולה, לכן לכל $n \geq N$ נקבל: $\gamma < a_n$. כמו כן, ברור שלכל n, $a_n \leq \sup a_n = \beta$. ומכאן מקבלים שלכל $n \geq N$, $a_n \in U$.

3. יהי α סודר. הוכיחו שα, כקבוצה, הוא קבוצה סגורה אמ"ם α עוקב או 0
הוכחה:

$\Longrightarrow$ $0 = \emptyset$ ולכן קבוצה סגורה. יהי α סודר עוקב' נסמן $\alpha = \gamma + 1$. $\alpha = \{\beta | \beta < \alpha\}$ (זה נכון לכל סודר), ולכן $\alpha^c = \{\beta | \beta \geq \alpha\} = \{\beta | \beta > \gamma\} = (\gamma, \infty)$, וזאת קבוצה פתוחה.

$\Longleftarrow$ יהי α סודר גבולי. $\alpha \notin \alpha$. כל סביבה בסיסית U של α מכילה קטע מהצורה $(\gamma, \alpha + 1)$. מכיוון שαגבולי, יש δ כך ש$\gamma < \delta < \alpha$, ולכן $\delta \in U \cap \alpha$. כלומר, α שייך לסגור של α, ולכן α אינו קבוצה סגורה.