

הצעה לפתרון – אלגברה לינארית להנדסה (83-110) – מועד ב' תש"ף

עדי מכנס

1. תהי מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
 א. הוכיחו שלמטריצה A ולמטריצה המשוחלפת A^t אותם ערכים עצמיים.

פתרון:

נשים לב כי:

$$p_A(x) = \det(xI - A)$$

לפי ההגדרה. כעת, כיוון ש I סימטרית:

$$= \det(xI^t - A)$$

כמו כן, מאלגברת מטריצות נקבל כי:

$$= \det((xI)^t - (A^t)^t) = \det((xI - A^t)^t)$$

אבל הרי דטרמיננטת מטריצה שווה לדטרמיננטת המשוחלפת שלה. לכן:

$$= \det(xI - A^t) = p_{A^t}(x)$$

כעת, כל הע"ע של A מאפסים את הפ"א שלה, ולפי מה שהראינו גם את הפ"א של A^t (כי הם שווים).כמו כן, אם אין ל A ע"ע מתקיים כי גם ל A^t אין ע"ע – משום שאחרת הפ"א יהיו שונים.

■ משל

- ב. הוכיחו שקיימות מטריצות הפיכות B, C כך ש $A = B + C$.

פתרון:

נשים לב כי:

$$A = (A - aI) + aI$$

כעת, לכל $a \neq 0$ ממשי מתקיים כי aI הפיכה. נדרוש כי $A - aI$ תהיה הפיכה גם כן וסיימנו.נשים לב, כי אם $A - aI$ אינה הפיכה, אזי מתקיים כי $\det(A - aI) = 0$ ולכן a הוא ע"ע של A .

כעת, a הוא ע"ע של A אם"מ הוא שורש של הפ"א $p_A(x)$. לכן, כיוון שיש לכל היותר n שורשים לפ"א (שהרי $p_A(x)$ הוא פולינום ממעלה n) – ישנה כמות סופית של שורשים! נבחר a כזה שאינו שורש של הפולינום ושהוא לא יהיה 0. לכן $A - aI$ הפיכה וקיבלנו את הדרוש.

■ משל

$$2. \text{ תהי } A = \begin{pmatrix} a & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

א. קבעו לאילו ערכי a המטריצה A לכסינה, הוכיחו תשובתכם.

פתרון:

נחשב תחילה את הפ"א של A :

$$p_A(x) = \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x-a & -1 & -a-1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

המטריצה משולשית עליונה ולכן הדטרמיננטה שלה היא מכפלת איברי האלכסון:

$$= (x-a)x^2$$

לכן הע"ע של A הם $0, a$.

נבדוק את הר"ג של כל ע"ע: נתחיל מ $\lambda = a$

$$V_a = N \begin{pmatrix} 0 & -1 & -a-1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

כעת, עבור $a = 0$ מתקיים כי יש 2 שורות אפסים, ולכן הר"ג שונה מהר"א ומכאן ש A אינה לכסינה.

אחרת:

$$\xrightarrow{\frac{1}{a}R_2, \frac{1}{a}R_3} N \begin{pmatrix} 0 & -1 & -a-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2, R_1-(-a-1)R_3, R_1 \leftrightarrow R_3, R_2 \leftrightarrow R_1} N \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נציב פרמטר במשתנה החופשי $x = t$ ולכן נקבל כי אוסף הפתרונות הינו:

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ולכן הבסיס למ"ע הנ"ל הינו $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

כעת, עבור $\lambda = 0$:

$$V_0 = N \begin{pmatrix} -a & -1 & -a-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כעת יש למטריצה בדיוק 2 שורות אפסים – ולכן הר"א שווה לר"ג. כמו כן, הוכחנו קודם כי כאשר $a = 0$ המטריצה אינה לכסינה וע"כ נחלק בו כדי למצוא פתרון לממ"ל לעיל:

$$\xrightarrow{\frac{1}{-a}R_1} N \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{a+1}{a} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נציב פרמטרים במשתנים החופשיים $y = s, z = t$ ולכן נקבל כי אוסף הפתרונות הוא:

$$\begin{pmatrix} -\frac{s}{a} - \frac{t(a+1)}{a} \\ s \\ t \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{a+1}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ולכן הבסיס למ"ע הינו $\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{a+1}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, כמו שרצינו.

סה"כ: המטריצה A לכסינה לכל $a \neq 0$ ממשי.

■ משל

ב. מצאו את כל ערכי a עבורם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

והביעו את a באמצעות a , או הוכיחו שאין כאלה.

פתרון:

כבר הוכחנו כי A לכסינה עבור $a \neq 0$. כמנ כן הראינו כי $a, 0$ הם הע"ע של A עם הר"א 1,2 בהתאמה.

לכן נקבל כי:

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} & 1 & -\frac{a+1}{a} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ואכן:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

כיוון ש A לכסינה. משל ■

3. תהי $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ מטריצה אורתוגונלית ($AA^t = I$) ותהי $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ההעתקה הלינארית המוגדרת ע"י $T\vec{v} = A\vec{v}$.

טענת עזר:

מטריצה אורתוגונלית משמרת מכפלה פנימית סטנדרטית. כלומר, תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ אורתוגונלית. אזי לכל $v, w \in \mathbb{R}^n$ מתקיים כי $\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$ (כאשר מדובר במפ"ס).

הוכחה: ראשית נשים לב כי מכיוון ש A ריבועית וכן $AA^t = I$ אזי A הפיכה ומתקיים כי $A^{-1} = A^t$.

כעת, יהיו $v, w \in \mathbb{R}^n$ לפי ההגדרה:

$$\langle Av, Aw \rangle \stackrel{(1)}{=} (Av)^t (Aw) \stackrel{(2)}{=} (v^t A^t) (Aw) \stackrel{(2)}{=} v^t (A^t A) w \stackrel{(3)}{=} v^t I w = v^t w \stackrel{(1)}{=} \langle v, w \rangle$$

כאשר:

(1) לפי ההגדרה

(2) מאלגברת מטריצות

(3) כיוון ש $A^{-1} = A^t$ אזי $AA^t = A^t A = I$

■ משל

הערה: מטענת עזר זו ניתן להראות כי גם מטריצה זו משמרת נורמה (סטנדרטית). כלומר לכל וקטור $v \in \mathbb{R}^n$ ומטריצה אורתוגונלית $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מתקיים כי:

$$\|Av\| = \|v\|$$

(זה נובע מיידית מהטענה לעיל, משום ש $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$)

כמו כן, נתון כי $T(1,0,0) = T(0,1,0)$ וגם $T(0,1,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
א. חשבו את כל האפשרויות עבור $T(0,0,1)$. הוכיחו תשובתכם.

פתרון:

נסמן $T(0,0,1) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ כעת, כיוון שכפל במטריצה אורתוגונלית משמר מפ"ס, מתקיים כי:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

כמו כן מכיוון שכפל במטריצה אורתוגונלית משמר נורמה, מתקיים כי:

$$\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 1$$

כלומר, מתקיים כי:

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 0 = 0 \\ \frac{a}{\sqrt{2}} + b \cdot 0 - \frac{c}{\sqrt{2}} = 0 \\ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1 \end{cases}$$

כלומר:

$$\begin{cases} b = 0 \\ a = c \\ \sqrt{2a^2} = 1 \end{cases}$$

ומהמשוואה השלישית:

$$2a^2 = 1$$

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

לכן, מתקיים כי ישנם שתי אפשרויות:

$$T(0,0,1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

או ש:

$$T(0,0,1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

■ משל

ב. כמה אפשרויות יש לאורך הוקטור $T(1, a, \sqrt{1-a^2})$ לפי הנורמה הסטנדרטית כאשר $a \in \mathbb{R}$? הוכיחו תשובתכם.

פתרון:

כיוון שכפל במטריצה אורתוגונלית משמר נורמה, מתקיים כי לכל $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \|T(1, a, \sqrt{1-a^2})\| &= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ \sqrt{1-a^2} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + a^2 + (\sqrt{1-a^2})^2} = \sqrt{1^2 + a^2 + 1^2 - a^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

■ משל

4. יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהיו שלושה וקטורים שונים $v_1, v_2, v_3 \in V$ בת"ל.
א. יהי $w \in V$, $w \neq 0$ המקיים $\langle v_i, w \rangle = 0$ לכל $1 \leq i \leq 3$.
הוכיחו שהקבוצה $\{v_1, v_2, v_3, w\}$ בת"ל.

פתרון:

יהי צירוף לינארי מתאפס:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 w = 0$$

צ"ל כי $a_1 = \dots = a_4 = 0$.

נכפיל את שני האגפים ב w (מצד שמאל):

$$\langle a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 w, w \rangle = \langle 0, w \rangle = 0$$

כעת מלינאריות מצד שמאל של המ"פ נקבל כי:

$$a_1 \langle v_1, w \rangle + a_2 \langle v_2, w \rangle + a_3 \langle v_3, w \rangle + a_4 \langle w, w \rangle = 0$$

כעת, לפי הנתון מתקיים כי:

$$a_4 \langle w, w \rangle = 0$$

אבל! מכיון ש $w \neq 0$ מתקיים כי $\langle w, w \rangle \neq 0$ מתכונות מ"פ, ולכן $a_4 = 0$.

כעת נחזור לנתון המקורי:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 w = 0$$

אבל זהו צירוף לינארי מתאפס ולכן כלל הסקלרים $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ הנותרים שווים לאפס.

סה"כ כלל הסקלרים התאפסו ולכן מדובר בצירוף לינארי טריוויאלי.

■ משל

ב. נניח ש $\langle v_1 + v_2, v_1 \rangle = \langle v_1 - v_3, v_2 \rangle$, הוכיחו כי הקבוצה $\{v_1, v_2, v_3\}$ אינה אורתוגונלית.

פתרון:

נב"ש כי הקבוצה א"ג. לכן:

$$0 = \langle v_1, v_2 \rangle - \langle v_3, v_2 \rangle = \langle v_1 - v_3, v_2 \rangle = \langle v_1 + v_2, v_1 \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle$$

מתכונות מ"פ והנחת השלילה.

לכן:

$$\langle v_1, v_1 \rangle = 0$$

אבל מהגדרת המ"פ הנ"ל מתקיים אמ"מ $v_1 = 0$ – בסתירה לכך ש v_1, v_2, v_3 בת"ל.

■ משל

5.

א. מצאו מטריצה ריבועית $A \neq 0$ כך ש $A^2 = 0$ או הוכיחו שלא קיימת כזו.

פתרון:

נביט במטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

ואכן:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ב. מצאו העתקה לינארית $T: V \rightarrow V$ שאינה חח"ע וגם $\ker T \subseteq \operatorname{Im} T$, או הוכיחו שלא קיימת כזו.

פתרון:

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ ע"י לכל } v \in \mathbb{R}^2, Tv = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v$$

נעת, הוכחנו בהרצאה כי התמונה של העתקת המטריצה היא מרחב השורות של המטריצה. לכן:

$$\operatorname{Im} T = \mathcal{C} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

כמו כן, הוכחנו בהרצאה כי הגרעין של העתקת המטריצה היא מרחב האפס של המטריצה. לכן:

$$\ker T = \mathcal{N} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נציב פרמטר במשתנה החופשי $x = t$. לכן אוסף הפתרונות יהיה:

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

נעת, ברור כי $\ker T \neq \{0\}$ כפי שהראינו לפני כן, ומכאן שהעתקה לעיל לא חח"ע (לפי המשפט מההרצאה). אך, אכן $\ker T = \operatorname{Im} T$ ולכן $\ker T \subseteq \operatorname{Im} T$.