

תרגיל 2 בפונקציות מרוכבות

1. פתרו את המשוואות הבאות וציירו ב $\mathbb{C}$ את הקבוצה המתקבלת.

$$|z| + 2iz + 2i\bar{z} + 3 = 0 \quad (\text{א})$$

פתרון: נציב $z = x + iy$ ונקבל שהמשוואה היא

$$x^2 + y^2 + 2i(x + iy) + 2i(x - iy) + 3 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4ix + 3 = 0$$

לפי השוואה חלק מדומה נקבל ש

$$x = 0$$

ולכן

$$y^2 + 3 = 0$$

כלומר אין נקודות כאלה.

$$|z|^2 + 2iz - 2i\bar{z} + 3 = 0 \quad (\text{ב})$$

פתרון: נציב $z = x + iy$ ונקבל שהמשוואה היא

$$x^2 + y^2 + 2i(x + iy) - 2i(x - iy) + 3 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$$

כלומר

$$x^2 + (y - 2)^2 - 4 + 3 = 0$$

$$x^2 + (y - 2)^2 = 1$$

כלומר קיבלנו מעגל שמרכזו ב $2i$ ורדיוסו 1.

$$P(z) = z^{12} + 3z^8 + 101z^4 + 1 \quad 2. \text{ נביט על הפולינום}$$

(א) הוכיחו כי לפולינום יש שורש על או בתוך מעגל היחידה - כלומר קיים שורש z המקיים $|z| \leq 1$.

פתרון: לפי המשפט היסודי של האלגברה, יש לפולינום 12 שורשים (אולי עם כפילויות) שנשמך אותם $a_1, \dots, a_{12}$

$$P(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_{12})$$

נשים לב שאם מציבים בפולינום $P(0)$ מקבלים את השוויון

$$(-a_1) \cdots (-a_{12}) = 1$$

ואם מוציאים ערך מוחלט מקבלים

$$|a_1 \cdots a_{12}| = 1$$

$$|a_1| \cdots |a_{12}| = 1$$

נניח בשלילה שכל השורשים נמצאים מחוץ למעגל היחידה כלומר לכל i מתקיים $|a_i| > 1$ אז בוודאי

$$|a_1| \cdots |a_{12}| > 1$$

בסתירה.

(ב) חיזוק לסעיף הקודם: הוכיחו כי לפולינום יש שורש בתוך מעגל היחידה - שורש המקיים $|z| < 1$.

הדרכה/רמז: קחו את z מהסעיף הקודם והניחו כי בשלילה כי $|z| = 1$. הגיעו לסתירה על ידי אי שוויון המשולש והגורם ה"דומיננטי" $101z^4$
פתרון: נניח בשלילה שיש שורש z עם $|z| = 1$. אז הוא מקיים

$$z^{12} + 3z^8 + 101z^4 + 1 = 0$$

כלומר

$$z^{12} + 3z^8 + 1 = -101z^4$$

נוציא ערך מוחלט ל-2 האגפים

$$|z^{12} + 3z^8 + 1| = |-101z^4| = 101$$

אבל לפי אי שוויון המשולש

$$|z^{12} + 3z^8 + 1| \leq |z^{12}| + 3|z^8| + 1 = 1 + 3 + 1 = 5$$

בסתירה.

(ג) הוכיחו כי לפולינום יש עוד שורש בתוך מעגל היחידה (רמז: הראו כי אין לפולינום שורשים ממשיים).

פתרון: ראשית, נשים לב כי אין לפולינום שורשים ממשיים. זאת מפני שעבור כל z ממשי נקבל ש

$$z^{12} + 3z^8 + 101z^4 + 1$$

הוא מספר ממשי גדול מאפס. עכשיו, לפי הסעיפים הקודמים, יש שורש z המקיים $|z| < 1$ והרגע ראינו שהוא לא ממשי ולכן $\bar{z} \neq z$. לפי משפט שראינו בכיתה גם $\bar{z}$ הוא שורש של הפולינום וכמובן שגם הוא מקיים $|\bar{z}| < 1$

3. מספר z נקרא שורש יחידה מסדר n אם הוא מקיים ש $z^n = 1$. חשבו את מכפלת כל שורשי היחידה מסדר n (התשובה מן הסתם יכולה להיות תלויה ב n).
פתרון: לפי נוסחא לשורש, נקבל ששורשי היחידה מסדר n הם בעצם

$$\text{cis } \frac{2\pi k}{n}$$

כאשר $k = 0, \dots, n-1$. צריך למצוא את המכפלה של כולם, כלומר:

$$\prod_{k=0}^{n-1} \operatorname{cis} \frac{2\pi k}{n}$$

לפי דה מואברת זה שווה ל

$$\prod_{k=0}^{n-1} \operatorname{cis} \frac{2\pi k}{n} = \operatorname{cis} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\pi k}{n}$$

עכשיו יש לנו כאן סכום חשבונית שבה האיבר הראשון הוא 0, ההפרש הוא $\frac{2\pi}{n}$ ויש n איברים ולכן הסכום הוא

$$\frac{2\pi(n-1)}{n} \cdot \frac{n}{2} = \pi(n-1)$$

ולכן התוצאה היא

$$\operatorname{cis} \pi(n-1) = \begin{cases} 1 & n \text{ odd} \\ -1 & n \text{ even} \end{cases}$$

4. האם הגבולות של הסדרות הבאות קיימים? נמקו. אם כן, חשבו אותם. (הכוונה לגבול מספרי בלבד, אין צורך להתייחס לאפשרות של גבול באינסוף)

פתרון:

$$z_n = \frac{1+n}{1-2n} + \frac{n-10}{n^2}i \quad (\text{א})$$

פתרון: כמובן שהסדרה מתכנסת ל $-\frac{1}{2}$

$$z_n = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + n \sin \frac{1}{n}i \quad (\text{ב})$$

פתרון: החלק המדומה מתכנס ל1 והחלק הממשי (חסום ו) מתבדר ולכן הסדרה מתבדרת.

$$z_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-n} + \sqrt[3]{3^n + 4^n}i \quad (\text{ג})$$

פתרון: כמובן שהסדרה מתכנסת ל $e^{-2} + 4i$

$$z_n = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n \quad (\text{ד})$$

פתרון: זה שווה ל $\cos \frac{\pi n}{3} + i \sin \frac{\pi n}{3}$ גם החלק הממשי וגם החלק המדומה (חסומים ו) מתבדרים ולכן הסדרה מתבדרת.