תרגיל 3

1. קבעו אילו מהמטריקות הבאות שקולות על $\mathbb{Z}$?

(א) d_5.

(ב) d_7.

(ג) מטריקה $0-1$ כלומר

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$$

(ד) והמטריקה המושרית מהמטריקה הסטנדרטית על $\mathbb{R}$ (כלומר $d(x,y)=|x-y|$).

2. נגדיר את S להיות קבוצת הסדרות הממשיות שהטור שלהן מתכנס בהחלט, כלומר

$$S=\{a_n \mid \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty\}$$

נגדיר על קבוצה זו שתי מטריקות:

$$d(a_n,b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n-b_n|$$

$$\rho(a_n,b_n)=\sup\{|a_n-b_n| \mid n\in\mathbb{N}\}$$

האם המטריקות שקולות? הוכיחו.

3. יהי (X,d) מרחב מטרי. נגדיר $\rho: X\to\mathbb{R}$ לפי

$$\rho(x,y)=\min\{1,d(x,y)\}$$

(א) הוכיחו כי ρ היא מטריקה.

(ב) הוכיחו כי ρ ו d שקולות.

(ג) הסיקו שכל מטריקה שקולה למטריקה חסומה.

4. כזכור, הוכחנו בתרגול שעל המרחב l_1 של הסדרות הממשיות (x_i) כך ש$\sum |x_i| < \infty$, המטריקה d_1 ומטריקת הסופרימום אינן שקולות. כמו כן, הוכחתם בהרצאה שמטריקות הן שקולות אמ"ם הן מגדירות את אותן קבוצות פתוחות. זה מוביל אותנו לתרגיל הבא: מצאו קבוצה פתוחה ב(l_1, d_1) שאינה פתוחה ב(l_1, d_∞).

5. א. יהי X מרחב מטרי שלם, ו$A \subseteq X$ תת מרחב. הוכיחו שאם A סגורה בX, אז A מרחב מטרי שלם.

ב. הראו שאם X אינו שלם, אז הטענה אינה בהכרח נכונה (כלומר, יתכן ש A סגורה בX, אבל A לא מרחב שלם).

ג. יהי X מרחב מטרי כלשהו, ו$A \subseteq X$ תת מרחב מטרי שלם. הוכיחו שA סגורה בX.

ד. יהי X מרחב מטרי שלם, ו$f : X \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. הוכיחו/הפריכו: $f[X]$ תת מרחב שלם של $\mathbb{R}$.

6. יהי (X, d) מרחב מטרי. נגדיר את **הקוטר** של תת-קבוצה $A \subseteq X$ על ידי:

$$diam\left(A\right) = \sup\left\{d\left(x, y\right) | x, y \in A\right\}$$

הוכיחו שמרחב מטרי הוא שלם אם ורק אם לכל סדרה יורדת של קבוצות סגורות לא ריקות $X \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq F_{n+1} \supseteq \cdots$ המקיימת $diam\left(F_n\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ מתקיים $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

זהו הקריטריון של קנטור לשלמות.

7. נתבונן במרחב $C\left[0,1\right]$, מרחב כל הפונקציות הרציפות $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ עם מטריקת המקסימום.

(א) תהי $a \in [0,1]$. נגדיר פונקציה $F_a : C\left[0,1\right] \to \mathbb{R}$ על ידי: $F_a\left(f\right) = f\left(a\right)$. הוכיחו שזו פונקציה רציפה.

(ב) הוכיחו שהקבוצה $\left\{f \in C\left[0,1\right] : f\left(\frac{1}{3}\right) < 19\right\}$ פתוחה ב$-$ $C\left[0,1\right]$.

8. יהי (X, d) מרחב מטרי, $A \subseteq X$, $a \in X$. הוכיחו שהפונקציות הבאות רציפות:

(א) $f_a(x) = d(x, a)$

(ב) $f_A(x) = d(x, A)$

9. יהי (X, d) מ"מ ו$a \in X$. הוכיחו שהקבוצה הבאה: $S[a, r] = \{x \in X : d(x, a) = r\}$ סגורה.