בס"ד

מבחן באלגברה לינארית 1 88-112.

סמסטר קיץ תש"ע. מועד א.

מרצים: ד"ר אלי בגנו, ד"ר אפי כהן.

חומר עזר: ראש פתוח.

משך הבחינה: שלש שעות.

הוראות הפעלה:

בבחינה שני חלקים. בחלק הראשון שלש שאלות, מתוכן יש לענות על שתים **בדיוק** באופן מפורט ומדוייק. כל תשובה נכונה ומפורטת מזכה ב 25 נקודות.

בחלק השני 6 שאלות, מתוכן יש לענות על 5 **בדיוק בטבלה בעמוד זה**, לפי ההוראות שבגוף השאלה. כל שאלה בחלק זה מזכה ב 10 נקודות לכל היותר.

שימו לב: המחברות משמשות לטיוטא בלבד, הן לא יבדקו.

F הוא שדה כלשהוא אם לא נאמר אחרת .

בכל אחת מהשאלות שבחרת מתוך 4-9 (פרט לשאלה 7) עליך לסמן כן/ לא בטבלה זו ליד כל סעיף בהתאם לנכונות הטענה.

שאלה		ציון
1	בדף השאלה	
2	בדף השאלה	
3	בדף השאלה	
4	א ב ג ד	
5	א ב ג ד	
6	א ב ג ד	
7		
8	א ב ג ד	
ס"ה		

חלק א

כתוב את התשובה המפורטת לשאלה זו בדף זה

שאלה 1

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F כך ש $1+1\neq 0$ F (מתמטיקאים אומרים בקיצור: המאפיין אינו 2) . תהי $T\in Hom(V,V)$ המקיימת $T^2=I$. נסמן:

$W=\{w\in V \mid T(w)=w\}$ ו $U=\{u\in V \mid T(u)=-u\}$.

א. הראה ש U הוא תת מרחב של V. (כמובן, גם W הוא תת מרחב של V, אל תוכיח זאת!).

פתרון: $\forall u,w\in U,\alpha\in F: T(u+\alpha w)=Tu+\alpha Tw=-u-\alpha w\Rightarrow u+\alpha w\in U$

U אינו ריק מכיוון ש $T(0)=0=-0\Rightarrow 0\in U$

ב. הראה שאם $T(v)=z$ אז $v+z\in W$ ו $v-z\in U$.

פתרון:

$$T(v+z)=Tv+Tz=z+TTv=z+Iv=z+v\Rightarrow v+z\in W$$
$$T(v-z)=Tv-Tz=z-TTv=z-Iv=z-v=-(v-z)\Rightarrow v-z\in U$$

ג. הוכח כי $V=U\oplus W$.

פתרון:

נוכיח ש $\underline{U\cap W=0}$. נניח $v\in U\wedge v\in W$ לכן $v=Tv=-v\Rightarrow(1+1)v=0$ מכיוון ש $1+1\neq 0$ יש לו הופכי בשדה, נכפול בו בשני צידי המשוואה לקבל $1v=0\cdot(1+1)^{-1}\Rightarrow v=0$

נוכיח ש $V\supseteq U+W$: ידוע ש $T^2=I$ ולכן $\forall v\in V: T(Tv)=v$. נסמן $z=Tv$ ולכן לפי סעיף ב' מתקיים $v+z\in W$ ו $v-z\in U$ ולכן $v=\frac{1}{2}(v-z+v+z)=\frac{v-z}{2}+\frac{v+z}{2}\in U+W$.

הכיוון $V\subseteq U+W$ טריוויאלי מסגירות ולכן $\underline{U+W=V}$

סה"כ הוכחנו את שתי הדרישות לסכום ישר.

ד.   הוכח או הפרך: בהנחה ש $\dim V \geq 2$, לכל $v \in V$ מתקיים $T(v) = v$ או $T(v) = -v$

הפרכה:

נפריך. ניקח $T: R^2 \to R^2$ כך ש $\begin{matrix} T(1,0) = -(1,0) \\ T(0,1) = (0,1) \end{matrix}$. נובע בקלות ש $T(a,b) = (-a,b)$ ולכן $T^2(a,b) = T(-a,b) = (a,b)$ לכן $T^2 = I$. אבל עבור $v = (1,1)$ מתקיים $Tv = (-1,1) \neq \pm(1,1)$.

כתוב את התשובה המפורטת לשאלה זו בדף זה

שאלה 2

א. נתונה המערכת $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y+z=1 \end{cases}$.

עבור אילו ערכים של הפרמטר a למערכת:

יש פתרון יחיד. במקרה זה פתור את המערכת.

אין פתרונות.

יש אינסוף פתרונות. רשום פתרון כללי.

פתרון:

נעביר למטריצה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-aR_1]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$

לכן אם $a \neq -2,1$ יש איבר פותח בכל עמודה ואין שורת סתירה לכן יש פתרון יחיד. נמשיך לדרג במקרה זה על מנת למצוא אותו

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & (a+2)(1-a) & 1-a \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{R_3}{(a+2)(1-a)}]{\frac{R_2}{a-1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & \frac{a+1}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-aR_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{array}\right)$$

ולכן הפתרון היחיד יהיה $\left(\frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}\right)$ עבור $a \neq -2,1$.

כאשר $a=1$ נחזור למטריצה לפני הפעולות הלא חוקיות במקרה זה ונקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ זהו מצב של אינסוף פתרונות והפתרון הכללי הינו $(1-t-s,t,s)$

כאשר $a=-2$ נחזור למטריצה לפני הפעולות הלא חוקיות במקרה זה ונקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$.

יש שורת סתירה ולכן אין פתרונות במצב זה.

ב. יהיו U,W תת המרחבים של $\Re^4$ המוגדרים ע"י:

$U = Sp((2,1,1,0),(1,0,1,1),(4,1,3,5)\}$, W הוא מרחב הפתרונות של המערכת $Ax=0$ כאשר

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. מצא בסיס עבור $U\cap W$.

פתרון:

קל לראות ש A הפיכה, $Ax=0 \Leftarrow x=A^{-1}0 \Leftarrow x=0$ לכן הפתרון היחיד למערכת ההומוגנית הוא הטריוויאלי ולכן $W=\{0\}$.

ולכן $U\cap W=\{0\}$ והבסיס למרחב שמכיל רק את אפס הוא <u>הקבוצה הריקה</u>.

כתוב את התשובה המפורטת לשאלה זו בדף זה

שאלה 3

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F עם בסיס $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$. נסמן $C=\{v_1+v_n, v_2+v_v,\ldots,v_{n-1}+v_n, v_n\}$.

א. הוכח כי C אף הוא בסיס של V.

פתרון:

נוכיח כי הוא בת"ל ופורש.

פורש: ברור ש $spanC \subseteq V$.

יהי $v\in V$ לכן $v=\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_n v_n$. לכן
$v=\alpha_1(v_1+v_n)+\ldots+\alpha_{n-1}(v_{n-1}+v_n)+(-\alpha_1-\ldots-\alpha_{n-1}+\alpha_n)v_n$ שזה צירוף לינארי של איברי C
לכן $V\subseteq spanC$ ולכן סה"כ $V=spanC$

בת"ל: נניח $0=\beta_1(v_1+v_n)+\ldots+\beta_{n-1}(v_{n-1}+v_n)+\beta_n v_n$ לכן
$0=\beta_1 v_1+\ldots+\beta_{n-1}v_{n-1}+(\beta_1+\ldots+\beta_n)v_n=0$ אבל זה צירוף לינארי מתאפס של איברי B שהם בת"ל ולכן הוא טירוויאלי כלומר $\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_{n-1}=0$ וגם $\beta_1+\ldots+\beta_n=0$ ולכן
$0+0+\ldots+0+\beta_n=0 \Rightarrow \beta_n=0$ כלומר קיבלנו שהצירוף הלינארי היחיד של אברי C שמתאפס הוא הטירוויאלי וכך הוכחנו בת"ל.

סה"כ C בת"ל ופורש את V ולכן הוא בסיס.

ב. מצא מטריצת מעבר מ B אל C.

פתרון:

$$[I]_C^B=\left([I]_B^C\right)^{-1}$$

$$[I]_B^C=\left([v_1+v_n]_B \quad \cdots \quad [v_{n-1}+v_n]_B \quad [v_n]_B\right)=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&\cdots&0\\0&1&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&1&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&\ddots&0\\1&1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$$

ולכן $$[I]_C^B = \left([I]_B^C\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ג. יהי $T \in Hom(V,V)$ כך ש $$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 3 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

מצא את $[T]_C$.

פתרון:

$$[T]_C = [I]_C^B [T]_B [I]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & 3 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & 3 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & 0 \\ -1 & -2 & \cdots & -n+1 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & 3 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & 0 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix}$$

חלק ב'

שאלה 4

נניח שיש פתרון שאינו אפס למערכת המשוואות, בעלת n שורות ו n עמודות, $Ax = 0$ מעל השדה Z_5.

סמן בטבלה את הטענות שבהכרח נכונות.

א. קיים $b \in Z_5^n$ כך שיש פתרון יחיד למערכת $Ax = b$.

הפרכה:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ לכן לאף b אין פתרון פרט ל $b = 0$ עבורו יש פתרונות כמספר האיברים

בשדה בריבוע (ובשדה יש לפחות 2 איברים – אפס ואחד)

ב. קיים $b \in Z_5^n$ כך שאין פתרון למערכת $Ax = b$.

הוכחה:

אני מוכיח מבלי לפרט כפי שראוי במבחן, כי זו שאלה סגורה. A אינה הפיכה (כי אחרת לא היה פתרון למערכת ההומוגנית פרט לאפס) ולכן קיימת מטריצה $E \neq 0$ כך ש $EA = 0$ (כי שורות A תלויות לינארית, תחשבו איך למצוא מטריצה כזו). ברור שקיים i כך ש $Ee_i \neq 0$ (זה ה i כך ש $C_i(E) \neq 0$).

נניח בשלילה ש $Ax = e_i$ נכפול ב E בשני האגפים לקבל $0 = EAx = Ee_i \neq 0$ סתירה.

ג. קיים $b \in Z_5^n$ כך שיש אין סוף פתרונות למערכת $Ax = b$.

הפרכה:

מעל שדה סופי, לא ייתכנו אינסוף פתרונות לעולם. יש לכל היותר גודל השדה בחזקת מספר המשתנים פתרונות.

ד. למטריצה A דרגה n.

הפרכה:

כפי שאמרנו, A אינה הפיכה ולכן בהכרח דרגתה קטנה מ n.

שאלה 5

סמן בטבלה את הטענות שבהכרח נכונות.

א. אם $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ קבוצה של n וקטורים בלתי תלויים במרחב וקטורי V אז כל תת קבוצה של A היא בלתי תלויה לינארית.

הוכחה:

כל צירוף לינארי של תת קבוצה הוא מקרה פרטי של צ"ל של הקבוצה הגדולה עם אפסים במקומות המתאימים. המקרה קצה היחיד הוא הקבוצה הריקה, והיא אכן בת"ל.

ב. אם $A=\{v_1,\dots,v_n\}$ קבוצה פורשת של n וקטורים במרחב וקטורי V אז כל תת קבוצה של V המכילה את A פורשת את V.

הוכחה:

הצ"ל הלינאריים של A הם מקרה פרטי של צ"ל של קבוצה שמכילה את A

ג. הקבוצה $\{(1,i),(2,i),(i,-i)\}$ תלויה ליניארית ב C^2 כמרחב וקטורי מעל R.

הפרכה:

ניקח צ"ל שמתאפס $(0,0)=a(1,i)+b(2,i)+c(i,-i)=(a+2b+ci,(a+b-c)i)$ לכן $\begin{matrix} a+2b+ci=0 \\ (a+b-c)i \end{matrix}$ כאשר $a,b,c\in\mathbb{R}$ ולכן $\begin{matrix} a+2b=0 \\ c=0 \\ a+b-c=0 \end{matrix}$ קל לראות ש $a=b=c=0$ בהכרח, ולכן הקבוצה בת"ל.

ד. הקבוצה $\{1,x^2,(x+1)^2\}$ תלויה ליניארית ב $\Re_2[x]$ כמרחב וקטורי מעל $\Re$.

הפרכה:

$0=a\cdot 1+bx^2+c(x+1)^2=a+c+2cx+(b+c)x^2$ לכן $\begin{matrix} a+c=0 \\ 2c=0 \\ b+c=0 \end{matrix}$ ושוב הצ"ל היחיד שמתאפס הוא הטריוויאלי, ולכן הקבוצה בת"ל.

שאלה 6

סמן בטבלה את הטענות שבהכרח נכונות.

תהי $T:\Re_3[x]\to\Re$ ההעתקה המוגדרת ע"י: לכל $p(x)\in\Re_3[x]$, $T(p(x))=p(0)$ ותהי $S:\Re\to\Re_3[x]$ ההעתקה המוגדרת ע"י: לכל $a\in\Re$ $T(a)=a(x^3+1)$.

א. S היא ליניארית.

הוכחה:

טריוויאלי להוכיח.

ב. $\dim KerT=3$.

הוכחה:

המימד של מרחב הפולינומים $\mathbb{R}_3[x]$ היא 4. לכן לפי סעיף ג' ומשפט הדרגה $4=\dim\mathbb{R}_3[x]=\dim\operatorname{Im}T+\dim\ker T=\dim\mathbb{R}+\dim\ker T=1+\dim\ker T$ והתשובה ברורה.

ג. $\operatorname{Im}T=\Re$.

הוכחה:

ניקח $p(x)=a\Rightarrow Tp=a$ לכן T על והתשובה ברורה

ד. אם $B=(1,x,x^2,x^3)$ אז $Tr([S\circ T]_B)=0$.

הפרכה:

$S\circ T(a+bx+cx^2+dx^3)=S(a)=a(x^3+1)$ לכן קל לוודא ש

$$[S\circ T]_B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$ ולכן $Tr([S\circ T]_B)=1$

שאלה 7

הגדר **שנים** מתוך המושגים הבאים במקום המיועד לכך בטבלה: (כל סעיף = 5 נקודות).

1) קבוצה בלתי תלוייה לינארית..

2) $Hom(V,W)$.

3) $KerT$

.

שאלה 8

תהי $T:\Re^3 \to \Re^3$ העתקה המקיימת:
$$T(1,1,2)=(-1,1,4)$$
$$T(2,1,1)=(0,1,3)$$
$$T(4,1,-1)=(2,1,1)$$

סמן בטבלה את הטענות שבהכרח נכונות.

פתרון:

קל לראות ש $-2(1,1,2)+3(2,1,1)=(4,1,-1)$. כמו כן קל לראות ש $\{(1,1,2),(2,1,1)\}$ בת"ל.

רואים בנוסף שאם נגדיר $\begin{matrix} T(1,1,2)=(-1,1,4) \\ T(2,1,1)=(0,1,3) \end{matrix}$ נובע

ש $T(4,1,-1)=-2T(1,1,2)+3T(2,1,1)=-2(-1,1,4)+3(0,1,3)=(2,1,1)$ ולכן השורה השלישית פשוט נובעת משתי הראשונות.

א. T אינה יכולה להיות לינארית.

הפרכה:

מכיוון שהשורה השלישית אינה סותרת את הראשונות, וניתן להשלים את $\{(1,1,2),(2,1,1)\}$ לבסיס ולפי משפט ההגדרה אפשר להגדיר אינסוף העתקות לינאריות שמקיימות את שלושת המשוואות.

ב. יש T לינארית המקיימת תנאים אלה והגרעין שלה חייב להיות בעל מימד גדול מ 1 .

הפרכה:

אמנם יש T כזו, אבל מימד התמונה הוא לפחות 2 ולכן מימד הגרעין הוא לכל היותר 1 בוודאי לא חייב להיות יותר מאד.

ג. יש אין סוף אפשרויות עבור T לינארית המקיימת תנאים אלה.

הוכחה:

הראנו לפי משפט ההגדרה (לאחר ההשלמה לבסיס, ניתן לשלוח את הוקטור המשלים לכל וקטור שנרצה במרחב – יש אינסוף אפשרויות וכמובן שהן שונות).

ד. אין T לינארית המקיימת תנאים אלה שהיא גם על.

הפרכה:

$\{(-1,1,4),(0,1,3)\}$ בת"ל ולכן ניתן להשלים גם אותה לבסיס. אפשר לשלוח את המשלים לבסיס המקור למשלים לבסיס הזה וכך לקבל איזומורפיזם שהוא בוודאי על.

שאלה 9

סמן בטבלה את הטענות שבהכרח נכונות.

א. יהיו $A,B\in M_2(\Re)$. אז $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3B^2A+B^3$.

הפרכה:

ניקח $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

אבל $\left(A+B\right)^3=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$

$$A^3+3A^2B+3B^2A+B^3=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+0+0=\begin{pmatrix}1&3\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

ב. לכל שתי מטריצות $A,B\in M_n(\Re)$ ולכל וקטור $v\in\Re^n$ מתקיים: "אם $Av=Bv$ אז $A=B$ ".

הפרכה:

$A=I,B=0,v=0$. $A0=B0$ אבל $A\neq B$

ג. לכל $T\in Hom(F^n,F^n)$ שהיא על ולכל $v,w\in F^n$ מתקיים $T(v)=T(w)\Rightarrow v=w$.

הוכחה:

$T:V\to V$ כאשר $\dim V=n$ אם T על אז מימד התמונה הוא n ולכן לפי משפט הדרגה מימד הגרעין הוא אפס ולכן ההעתקה חח"ע ולכן המשפט נכון.

ד. אם למערכת משוואות לינאריות יש אין סוף פתרונות אז היא חייבת להיות הומוגנית.

הפרכה:

למערכת $x+y=1$ יש אינסוף פתרונות מהצורה $(1-t,t)$.