



יש כאן כמה תקופות של כמה נשאים
עם, על הכל.

אם זה עוזר לעזר משהו אז שמחתי לעצורי!

אם אתם מוצאים שכתבתי משהו לא נכון,
מוזמנים לפנות אלי.

לא חיותי במרטונים שם דבר על צמצום פנקציות. יכול להיות
שפספסתי, אבל בכל מקרה בדאי שתפסו על זה בנאה.

באשר כתיב אצרי, בו טענה ששיר פתר בערסון.

בדידה - חזרה

מחלקות שקילות
יהי R ויהי a טיפוס של R

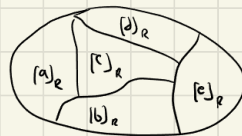
$$[a]_R = \{b \in A \mid (a,b) \in R\}$$

שנמצאים טיפוס איתו.
שקולים אליו.

קבוצת המנה

תהי קבוצת A וחס R על A ויהי

$$A/R = \frac{A}{R} = \frac{\text{איחוד מחלקות שקילות}}{\text{המנה}} = \text{המנה}$$



בצורה:

חס בקר מלא

R וחס סדר מלא אם לכל שני איברים $(a,b) \in A$ מתקיים כי

$$(a,b) \in R \quad \text{או} \quad (b,a) \in R$$

חסר בשפת הקודש: אפשר להשוות בין כל שני איברים במ

ביחס $\leq$ באשר אנחנו אומרים a גדול מ- b אנחנו מתכוונים
לזה שראובן a בצד הימני של a בלבד

(עין חזק $\leq$ שטח חם: b) ניתן תמיד לחשוב על זה כ: $b \leq a$

יהי R יחס סדר חלקי על A

מינימלי

איבר $a \in A$ נקרא מינימלי אם לא קיים איבר קטן ממנו

$$\forall b \in A: (b, a) \in R \rightarrow b = a$$

מקסימלי

איבר $a \in A$ נקרא מקסימלי

$$\forall b \in A: (a, b) \in R \rightarrow b = a$$

לא קיים איבר שמדור ממנו.

מינימום / הקטן ביותר

איבר $a \in A$ נקרא מינימום אם

$$\forall b \in A: (a, b) \in R$$

מינימום זה אינו שגורר צבוע עם כולם והוא המזן מכלם

מקסימום / האיבר הגדול ביותר

איבר $a \in A$ נקרא מקסימום אם

$$\forall b \in A: (b, a) \in R$$

ניתן צבוע עם כולם והוא הגדול מכלם

יוזר R יחס סדר חלקי על A . A קטובה סדורה חלקית.
תהי $B \subseteq A$

חסם מלמעלה

$a \in A$ נקרא חסם מלמעלה של B אם

$$\forall b \in B: (b, a)$$

ניתן צבוע עם כל האיברים ב B והוא מינימל

חסם מלמטה

איבר $a \in A$ נקרא חסם מלמטה של B אם

$$\forall b \in B: (a, b)$$

ניתן להשוות עם כל האיברים ב B , a
נמצא משמאל.

יהי R יחס סדר חלקי על A . A קטובה סדורה חלקית.
תהי $B \subseteq A$

חסם מרבי

$\forall b \in B (a \leq b)$

$a \in A$ נקרא חסם מרבי של B אם

ניתן להשוות עם כל האיברים ב B והוא מ'גדול'

חסם מינימי

$\forall a \in B (a \leq b)$

איבר $a \in A$ נקרא חסם מינימי של B אם

ניתן להשוות עם כל האיברים ב B , a נמצא משמאל.

חסם עליון

מינימלי מחסמי ומרבי

חסם תחתון

מקסימלי מחסמי מרבי

$$f: \underset{\text{חזק}}{A} \longrightarrow \underset{\text{חלש}}{B}$$

$$f: A \rightarrow B$$

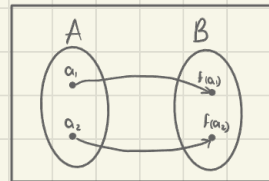
$$f(a) = b \Leftrightarrow (a, b) \in f$$

$f(a) = b$ $(a, b) \in f$ ו $p \in B$ $\Leftrightarrow a \in A$ חלש
 כל $a \in A$ יש $b \in B$ כזה ש $(a, b) \in f$

חזק

אם f חזק אז f חלש

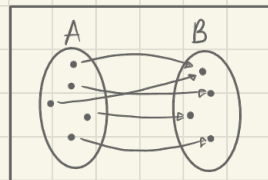
$$\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$



חסר

אם f חסר אז f חזק

$$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b$$



פונקציה מוגדרת היטב

1. לכל $x \in A$, $f(x)$ מוגדר

2. לכל $x \in A$, $f(x) \in B$

3. לכל יתכן x שבמידה של שני איברים ב B

תמונה

תהי $f: A \rightarrow B$ ותהי $x \in A$. התמונה של x הינה $f(x)$

$$f[X] = \{ f(x) \mid x \in X \}$$

התמונה ההפוכה

תהי $f: A \rightarrow B$ ותהי $Y \subseteq B$. התמונה ההפוכה היא אוסף

המקורות של איברים ב Y

$$f^{-1}(Y) = \{ a \in A \mid f(a) \in Y \}$$

הרכבה

תהי $f: A \rightarrow B$ ותהי $g: B \rightarrow C$ אז:

$$g \circ f : A \rightarrow C$$

המוכנה על

$$g \circ f(a) = g(f(a))$$

פונקציות הזהות

תהי קבוצה A ונבחר את פונקציות הזהות δ_A

$$I_A: A \rightarrow A$$

$$I_A(a) = a$$

הפיכה

תהי $f: A \rightarrow B$ כן שקיימת פונקציה
העוקבת $g: B \rightarrow A$

$$g \circ f = I_A \quad f \circ g$$

f נקראת הפכה ו- g נקראת ההופכת שלה ומסמכים

$$f^{-1} = g$$

עוצמות

לעצמות שוות $|A| = |B|$ אם קיימת פונקציה הפיכה $f: A \rightarrow B$

תהיה A, B , $|A| \leq |B|$ אם קיימת $f: A \rightarrow B$ חד־חד

סדרה סדרת איברים A היא פונקציה $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow A$
מקבוצת המקומות עקביות האיברים

$$\aleph_0 = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$$

$$|\mathbb{R}| = \aleph_1 \neq \aleph_0$$

משפט קנטור

העוצמה של קבוצה קטנה ואינה שווה
לעוצמת קבוצת תתי הקבוצות שלה.

$$|A| < |P(A)|$$

בת - מנייה

קבוצה A נקראת בת מניה אם
אפשר למנות אותה. אפשר לסדר אותה.

$$|A| \leq |N|$$

טענה

כל תתי קבוצה אינסופית של N היא N_0
ניתן להסידור בכל קבוצה בת מניה אינסופית היא מהעוצמה N_0

טענה

תהייה A, B, C, D $A \cap B = \emptyset$ $C \cap D = \emptyset$ $A \subset C$ $B \subset D$
 $A \cup B \sim C \cup D$

חיבור עוצמות

$$a + b = |A \cup B|$$

תהייה a, b עוצמות A, B נבחרות של a, b כשר

שולחן

$B \sim D$ $A \sim C$ $C \cap D = \emptyset$ $A \cap B = \emptyset$ A, B, C, D תהייה
 $A \times B \sim C \times D$

כפל

$$\alpha \cdot b = |A \times B|$$

תהייה a, b סוציאליות

באשר A, B נביא את של הסוציאליות a, b

האקרה

$A^B = \{ \text{אוסף הפונקציות } A \rightarrow B \}$
 מהמרחב A לבסיס

שולחן

$A^B \sim C^D$ $A \sim C$ $B \sim D$ A, B, C, D תהייה
 אצ

חזקת

$$a^b = |A^B|$$

תהייה a, b סוציאליות

חוקי חזקות של צמצום

תהייה a, b צמצום

$$a^b \cdot a^c = a^{(b+c)} \quad 1.$$

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c} \quad 2.$$

$$a^b \cdot c^b = (a \cdot c)^b \quad 3.$$

פונקציות מציינות

תהי A קבוצה ותהי $\emptyset \subseteq A$ נשיר את הפונקציה המציינת

$$I_\emptyset: A \rightarrow \{0, 1\}$$

$$I_\emptyset(x) = \begin{cases} 1 & x \in \emptyset \\ 0 & x \notin \emptyset \end{cases}$$

הפונקציה המציינת מספרת לנו

מ. אם האובייקט נמצא בקבוצה $\emptyset$
ומי אם האובייקט לא נמצא בקבוצה $\emptyset$

$$2^N = N$$

$$a \cdot b = \max(a, b)$$

$$|P(A)| > |A|$$

$$a + b = \max(a, b)$$

$$|A| < 2^{|A|}$$

$$|P(A)| = 2^{|A|}$$

טענה

תהייה קטעית $A \subseteq B$ $\Leftrightarrow$ $|A| \leq |B|$ $\Leftrightarrow$ קיימת פונקציה $f: A \rightarrow B$ כזו ש- $x \in A \Rightarrow f(x) \in B$

חשבון

$$a+b \leq c+d$$

$$a \leq c, b \leq d \Rightarrow$$

תהייה אצטיות

$$a \cdot b \leq c \cdot d$$

$$a \leq c, b \leq d \Rightarrow$$

תהייה אצטיות

$$a^b \leq c^d$$

$$a \leq c, b \leq d, a \neq 0 \Rightarrow$$

תהייה אצטיות

סמטת נקודת שבת

$$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow h(X_1) \subseteq h(X_2) \quad \text{אם}$$

$$h: P(A) \rightarrow P(A)$$

תהי

$$h(K) = K$$

$$K \subseteq A \quad \text{קיימת}$$

אז

משפט הנגזור - שריר - כנגד שט"ף

$$|A| = |B|$$

אם

$$|B| \leq |A|$$

$$, |A| \leq |B|$$

אם

$$|(-1, 1)| = |\mathbb{R}| = \aleph$$

אם $a < b$ מספרים סופיים נפרדים

$$|(a, b)| = |(1, 1)| = \aleph$$

$$\text{וקשה} \quad \aleph \leq |(a, b)| \leq \aleph$$

$$|(a, b)| \leq |(a, b)| \leq |\mathbb{R}|$$

כי

$$|(a, b)| = \aleph$$

$$\text{וקשה} \quad \aleph \leq |(a, \infty)| \leq \aleph$$

$$|(a, a+)| \leq |(a, \infty)| \leq |\mathbb{R}|$$

כי

$$|(a, \infty)| = \aleph$$

טענה

$$|S| \leq \aleph_0$$

תהי S קבוצה של קבוצות כך ש
ואם $x \in S$, $|x| \leq \aleph_0$ אזי

$$\left| \bigcup_{x \in S} x \right| \leq \aleph_0$$



אקסיומת הבחירה

תהי S קבוצת קבוצות עם תיבות ושדה

האלים הוא איחוד של האיברים מכך

אזי קיימת פונקציית בחירה $f: S \rightarrow U$

כך ש $f(x) \in x$

$$U = \bigcup_{x \in S} x$$

טענה

חזק

$$f: A \rightarrow B$$

קיימת

אז

$$A, B \neq \emptyset$$

תהייה

אז

$$g: B \rightarrow A$$

אם קיימת

שרשרת

תהי קבוצה X עם יחס סדר חלקי $\leq$ קטן שני
 ותת קבוצה $A \subseteq X$ נקראת שרשרת
 אם לכל $a_1, a_2 \in A$ $a_1 \leq a_2$ או $a_2 \leq a_1$ מילוק אחד הכלב

כמילים רגילות אפשר להשוות בין כל שני איברים בשרשרת

שרשרת מקסימלית

שרשרת שאינה מוכללת בשרשרת אחרת

צירוף המקסימום של האוסדורף

תהי X קבוצה עם יחס סדר חלקי ותהי S שרשרת $S \subseteq X$
 אזי S' מכללת בשרשרת מקסימלית ב X

דברים על עוצמות ונזה

$|אוסף| = |אובייקטים| + |אוספים|$
 תת קבוצות אינסופיות של האוסף וכן זרות

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 \leq \aleph_0 \quad \text{לכן} \quad f_m(x) = 2^n \cdot 3^k$$

$$\aleph_0 \leq \aleph_0 \cdot \aleph_0 \quad \text{לכן} \quad f(n) = (n, 1)$$

$$\text{החש } f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\text{החש } f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

ולפי הקשר סימט.

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

$$2^{\aleph_0} = \aleph$$

$$\aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$$

$$\aleph^{\aleph} = (2^{\aleph_0})^{\aleph} = 2^{\aleph \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph}$$

$$\aleph = 2^{\aleph_0} < \aleph_0^{\aleph_0} < \aleph^{\aleph_0} = \aleph \stackrel{\text{ב.ש.ק.}}{\implies} \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$$

$$2^{\aleph} < \aleph_0^{\aleph} < \aleph^{\aleph} = 2^{\aleph} \stackrel{\text{ב.ש.ק.}}{\implies} \aleph_0^{\aleph} = 2^{\aleph}$$

מכנס באדיבור

משפט

תהי $f: A \rightarrow B$ ותהי $x \in A$ $Y \subseteq B$ אזי

1. $x \in f^{-1}[f(x)]$ כל המקורות של התמונה של x יהיו מוכלים ב- x

2. $f[f^{-1}(Y)] \subseteq Y$ התמונה של המקורות של Y מכילה את Y

3. אם f חד-חד

$$x = f^{-1}[f(x)]$$

4. אם f חד-חד

$$Y = f[f^{-1}(Y)]$$

(נסי להוכיח נפרדות אחד מהם)

משפט

תהי $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ אז

1. אם f חד-חד

אז $g \circ f$ חד-חד

2. אם g חד-חד

אז $f \circ g$ חד-חד

משפט

אם f הפיכה אז קיימת g הופכית יחידה.

משפט

f הפיכה $\Leftrightarrow f$ חד-חד ועל

לשון

$g: B \rightarrow C$, $f: A \rightarrow B$ תהיה
 שח $g \circ f$ ρ_C שח f, g ρ_C
 ρ_C $g \circ f$ ρ_C f, g ρ_C

שח (שח)

$f[A] = B$ ρ_C $f: A \rightarrow B$

שח

$y \in f[X] \Leftrightarrow \exists x \in X: f(x) = y$

שח

$x \in f^{-1}[Y] \Leftrightarrow f(x) \in Y$
 Y ρ_C

מסקנה

אם נתן מסדר את איברי A מסדרה ρ_C של איברי Y ρ_C $A \sim N$

דוגמאות

קטגוריה מנה

$$P(A) \quad A = \{1, 2, 3\}$$

$$P(A) \text{ על } R \text{ יחס}$$

$$(B, C) \in R$$

$$B \cap \{1, 2\} = C \cap \{1, 2\}$$

אילו חתכים אפשריים בקטגוריה?

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$$

ומה בין מחלקות השקולים?

$$[\emptyset]_R = \{\emptyset, \{3\}\}$$

$$[\{1\}]_R = \{\{1\}, \{1, 3\}\}$$

$$[\{2\}]_R = \{\{2\}, \{2, 3\}\}$$

$$[\{1, 2\}]_R = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$$

$$P(A)/R = \left\{ \begin{array}{l} \{\emptyset, \{3\}\} \\ \{\{1\}, \{1, 3\}\} \\ \{\{2\}, \{2, 3\}\} \\ \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\} \end{array} \right\}$$

יחס סדר חלקי, לא טרנזיטיב, "מחלק את" על הטבע

2 מחלק את 3

3 מחלק את 2

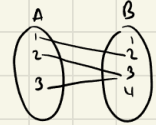
עוד דוגמאות

$$f[\{1,2\}] = \{f(1), f(2)\} = \{2,3\}$$

$$f[\emptyset] = \emptyset$$

$$f[\{2,3\}] = \{3\}$$

דוגמה של פונקציה



הפונקציה ההפוכה

$$f^{-1}[\emptyset] = f^{-1}[\{1\}] = f^{-1}[\{1,4\}] = \emptyset$$

$$f^{-1}[\{2\}] = \{1\}$$

$$f^{-1}[\{3\}] = \{2,3\}$$

$$f^{-1}[\{B\}] = A$$

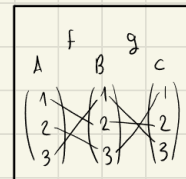
מבין שהפונקציה שלמה

הרכבת פונקציות

דוגמה

$$g \circ f(1) = g(f(1)) = g(2) = 2$$

$$g \circ f(2) = g(f(2)) = g(3) = 1$$



דוח מאות חשבויות (קצת)

יהי אוסף קטנות $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אם יחס ההכללה בין הקטנות אז:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \text{הסמינל של האינסוף}$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \text{האינסוף של האינסוף}$$

(סדרות חזקה ופארה חזקה - דקה 35 בסרטון של אינפיניט - עינאל - וקטורלי)

דבר!

$$N_0 + N_0 = \left| \text{זוגות} \cup \text{זוגות} \right| = \left| N \right| = N_0$$

$$0 \cdot \alpha = \left| \emptyset \times A \right| = \left| \emptyset \right| = 0$$

$$\emptyset^\emptyset = 0^0 = 1$$

$$0^A = \emptyset^A = \{\emptyset\} = 0$$

טיפים ודגשים

• נאז אונגרים עני ערוכיו שהאיחוד הכללי נאז הוא $\bigcup_{i \in I} A = \mathbb{N}$
אפשר לעשות הכלה זו כיוונית (נראה לי)

• אם קצת מסתבכים בפונקציות אפשר להקטין וכתוב ציטוטים איך הפונקציה "נראית"

• אם תמיד אם $g \circ f = I_A$ זה אומר ש $f \circ g = I_B$

• פונקציות הנהיגים הם חתכים וסל

• אם $f \circ g = I_B$, $g \circ f = I_A$ אז f וסל

• אם $f \circ g = I_A$ חתכים $f \Leftarrow$ חתכים

• איך מוכיחים ששתי פונקציות שוות? $f_1, f_2 \in A^B$ שכל איבר ב C
 $f_2(c) = f_1(c)$

בואו נהיה השנה
עם אחוז העוברים הכי גבוה.
סאור?

יאללה נהצעה לכולנו!

אין על החממה מחזור 2025!

יש תקווה לשנה טובה!!!