תרגיל 10

.1

(א) נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$ ע״י: $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 + y_1^2 = x_2 + y_2^2$.
הוכיחו ש $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2/\sim$. רמז: מצאו את ההעתקה ההפוכה ל$\hat{f}$ מ$\mathbb{R}$ ל$\mathbb{R}^2/\sim$.
הוכחה:

נגדיר $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ע״י $f(x,y) = x + y^2$. f רציפה כפולינום. מכבדת את יחס השקילות באופן חזק, וכן f על, כי למשל מקור של r הוא $(r,0)$. לכן קיימת $\hat{f} : \mathbb{R}^2/\sim \to \mathbb{R}$ והיא חח״ע ורציפה. נוכיח שההופכית רציפה. נגדיר את ההופכית כך $g(r) = [(r,0)]$. זה בעצם הרכבה של שתי פונקציות: $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת ע״י $g'(r) = (r,0)$, ופונקציית המנה ששולחת כל איבר למחלקת השקילות שלו. g' רציפה כי היא רציפה רכיב-רכיב (פונקציית הזהות ופונקציה קבועה), ופונקציית המנה רציפה מההגדרה של טופולוגיית המנה. כלומר, g היא הרכבה של פונקציות רציפות ולכן רציפה.

קל לראות שg וf הופכיות אחת לשניה.

(ב) נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$: $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$. למה הומיאומורפי $\mathbb{R}^2/\sim$?
פתרון:

$\mathbb{R}^2/\sim \cong [0,\infty)$.

הוכחה: נגדיר את הפונקציה הבאה: $f : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ ע״י $f(x,y) = x^2 + y^2$. f רציפה כפולינום ומכבדת את יחס השקילות בצורה החזקה. כמו כן f על, כי המקור של $r \geq 0$ הוא $(\sqrt{r}, 0)$. לכן יש $\hat{f} : \mathbb{R}^2/\sim \to [0,\infty)$ מוגדרת, רציפה וחח״ע. נמצא את ההופכית. נסתכל על $g(r) = [(\sqrt{r}, 0)]$. קל לראות שהיא אכן ההופכית של $\hat{f}$. כמו בסעיף א, g היא הרכבה של פונקציות $g' : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע״י $g'(r) = (\sqrt{r}, 0)$, ופונקציית המנה $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}/\sim$. g' רציפה רכיב-רכיב ולכן רציפה.
קיבלנו שg היא הרכבה של פונקציות רציפות ולכן רציפה.

.2 יהי X מרחב המנה של $\mathbb{R}$ המתקבל ע״י זיהוי כל הנקודות מנורמה גדולה שווה מ1. כלומר $x \sim y$ אמ״ם $x = y$, או ש $|x| \geq 1 \wedge |y| \geq 1$. הוכיחו ש: $X \cong S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.
הוכחה:

הוכחתם בהרצאה ש$S^1 \cong [0,1]$כאשר מזהים את הנקודות 0 ו1. כמו כן, ידוע ש $[0,1] \cong [-1,1]$. לכן מספיק להוכיח ש $X \cong [-1,1]/\sim$ עם יחס השקילות של זיהוי הנקודות -1 ו1.

נגדיר $f:\mathbb{R}\to[-1,1]/\sim$ ע״י

$$f(x)=\begin{cases}[1] & |x|\geq 1\\ [x] & otherwise\end{cases}$$

קל לראות שf על ומכבדת את יחס השקילות בצורה החזקה.

נוכיח שf רציפה. נשים לב שניתן להגדיר את f בצורה הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}[1] & x\in(-\infty,1]\cup[1,\infty)\\ [x] & x\in[-1,1]\end{cases}$$

כלומר, f מוגדרת בחלקים על תתי קבוצות סגורת. הוכנו בעבר שאם יש מספר סופי של קבוות סגורות שמכסות את המרחב, ופונקציה מוגדרת בחלקים על הקבוצות הסגורות, מתלכדת על החיתוכים, ורציפה בכל קבוצה סגורה, אז היר רציפה. לכן מספיק להראות שהחלקים של הפונקציה רציפה.

החלק הראשון הוא פונקציה קבועה ולכן רציף.

החלק השני הוא הרכבה של פונקציית הזהות $id:[-1,1]\to[-1,1]$ עם פונקציית המנה ולכן רציף.

לסיכום: $\hat{f}:\mathbb{R}/\sim\to[-1,1]/\sim$ מוגדר חח״ע ורציף.

כעת, נשים לב ש$\mathbb{R}/\sim$ קומפקטי, כי $\Pi|_{[-1,1]}\to\mathbb{R}/\sim$ הוא על, ו$[-1,1]$ הוא קומפקטי, וכידוע תמונה רציפה של קומפקטי היא קומפקטית.

לסיכום: $\hat{f}$ רציף, על וחח״ע מקומפקטי להאוסדורף, ולכן העתקת מנה חח״ע, כלומר, הומיאומורפיזם.

3. הוכיחו שפונקציית מנה חח"ע היא הומיאומורפיזם.
הוכחה:

תהי $f:X\to Y$ פונקציית מנה חח"ע. בפרט, f על, חח"ע ורציפה. נוכיח שf פתוחה. ובכן, תהי $O\subseteq X$ קבוצה פתוחה. בגלל שf חח"ע, $f^{-1}(f(O))=O$. כעת מכיוון שf העתקת מנה, $f(O)$ פתוחה.

4. תנו דוגמא לפונקציה רציפה, על ופתוחה שאינה סגורה, ולפונקציה רציפה, על וסגורה שאינה פתוחה.
פתרון:

פתוחה שאינה סגורה: פונקציית ההטלה על הרכיב הראשון $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ היא רציפה על ופתוחה. היא לא סגורה כי הקבוצה $A=\{(x,\frac{1}{x}):x\neq 0\}$ סגורה ב$\mathbb{R}^2$ כתומנה הפוכה של f תחת הפונקציה הרציפה $f(x,y)=xy$. אבל $f[A]=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, שאינה סגורה.

סגורה שאינה פתוחה: נגדיר על $\mathbb{R}$ טופולוגיה: הקבוצות הפתוחות הן הקבוצות שלא מכילה את 0. נסכל על טופולוגיית שרפינסקי $\{0,1\}$ כאשר $\{0\}$ פתוח. נגדיר: $f:\mathbb{R}\to\{0,1\}$ ע"י $f(-\infty,0)=0, f[0,\infty)=1$. היא על. היא רציפה כי התמונה ההפוכה של $\{0\}$ לא מכילה את 0 ולכן פתוחה. היא סגורה כי כל קבוצה סגורה מכילה את 0, ולכן התמונה שלה מכילה את 1. כל תת קבוצה שמכילה את 1 היא סגורה. אבל היא לא פתוחה, כי למשל $f(\{1,2\})=\{1\}$ שאינו פתוח.