

אלגברה לינארית 2 (88113) תשובות למבחן מועד ג'

1.

- א. למשל, המטריצה האלכסונית $A = \text{diag}(0, -1, 1)$.
 ב. למטריצה כזאת יש לפחות 3 ע"ע שונים $(0, -1, 1)$, וזה בלתי אפשרי.
 ג. למטריצה $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ יש (לפחות) שני ע"ע שונים $(0, -1)$, ולכן היא דומה למטריצה האלכסונית $D = \text{diag}(0, -1)$. לפיכך $10I + A$ דומה למטריצה $10I + D = \text{diag}(10, 9)$, ולכן $\det(10I + A) = \det(10I + D) = 90$.

2.

- א. או $J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(i) \oplus J_1(-i)$ או $J_2(0) \oplus 2J_1(i) \oplus J_1(-i)$
 ב. רק $J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(i) \oplus J_1(-i)$.
 ג. המטריצה B איננה לכסינה, ולכן איננה צמודה לעצמה. ייתכן שהיא בעלת איברים ממשיים בלבד, למשל: $B = J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3.

- א. פ"מ $x(x-1)(x-a) = 0$ אם $a \neq 0, 1$.
 פ"מ $x(x-1)^2 = 0$ אם $a = 1$.
 פ"מ $x(x-1) = 0$ אם $a = 0$ וגם $b = 2c$.
 פ"מ $x^2(x-1) = 0$ אם $a = 0$ אבל $b \neq 2c$.
 ב. $a \neq 0, 1$ או $a = 0$ וגם $b = 2c$.
 ג. אין ערכים כאלו, כי M לא סימטרית.

4.

- א. למשל $\left\{ (0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2) \right\}$ או $\left\{ \frac{1}{3}(1, 2, 2), \frac{1}{3\sqrt{5}}(-2, 5, -4) \right\}$.
 ב. למשל $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 0, 1) \right\}$.
 ג. התשובה הפשוטה: וקטור האפס $(0, 0, 0)$. (מזכה בניקוד מלא)
 ישנה תשובה נוספת: $2/3$ כפול סכום שלושת הווקטורים מסעיפים א', ב'. ניתן לקבלה ע"י הצגת הווקטור הנעלם כצירוף לינארי של שלושת הווקטורים הנ"ל (המהווים ב"נ של $\mathbb{R}^3$), עם מקדמים לא ידועים a, b, c , ופתרון מערכת המשוואות

$$(a-1)^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (b-1)^2 + c^2 = a^2 + b^2 + (c-1)^2 = 1$$

5.

- א. למשל $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$, $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
 ב. המטריצה נורמלית (לכסינה אוניטרית), אך איננה אוניטרית או צמודה לעצמה.
 ג. $Z^{100} = U D^{100} U^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^{100} + 2^{100} & 4^{100} - 2^{100} \\ 4^{100} - 2^{100} & 4^{100} + 2^{100} \end{pmatrix}$. סכום האיברים הוא $2 \cdot 4^{100}$.