פתרון תרגיל בית 8 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1 (חימום). תהי G חבורה, ויהיו $A,B \leq G$. הוכיחו או הפריכו: אם A ו-B תת־חבורות נורמליות ב-G, אז $A \cap B \triangleleft G$.

פתרון. זו הוכחה. ידוע לנו כי A ו-B נשמרות תחת הצמדה (כי הן תת־חבורות נורמליות). כלומר לכל $g \in G$ מתקיים כי $gAg^{-1} \subseteq A$ וגם $gBg^{-1} \subseteq B$. בהנתן איבר $x \in A \cap B$, אז לפי שתי ההכלות האלו נסיק כי $gxg^{-1} \in A \cap B$ לכל $g \in G$. לכן $A \cap B$ נשמרת תחת הצמדה מ-G, ומכאן נקבל כי $A \cap B \triangleleft G$.

שאלה 2. יהי $f\colon G \to H$ הומומורפיזם.

א. הוכיחו שאם G אבלית, אז $\operatorname{im} f$ תת־חבורה אבלית.

ב. הסיקו מהסעיף הקודם שאם $G \cong H$, אז G אבלית אם ורק אם H אבלית.

ג. הוכיחו או הפריכו: קיים אפימורפיזם $\varphi\colon D_8 \to U_{17}$.

פתרון.

א. אנחנו יודעים כי $\operatorname{im} f \leq H$. נותר להראות שהיא אבלית. יהיו $h_1, h_2 \in \operatorname{im} f$. אז ישנם איברים g_1, g_2 כך שמתקיים $f(g_1) = h_1, f(g_2) = h_2$. מפני שנתון ש-$G$ אבלית יתקיים גם

$$h_1h_2 = f(g_1)f(g_2) = f(g_1g_2) = f(g_2g_1) = f(g_2)f(g_1) = h_2h_1$$

ולכן כל זוג איברים ב-$\operatorname{im} f$ מתחלף.

ב. אם חבורות הן איזומורפיות, אז יש בינהן איזומורפיזם. נניח $\phi : G \to H$ הוא איזומורפיזם. לכן ϕ הוא על, כלומר $H = \operatorname{im} \phi$. אם G היא אבלית, אז גם H היא אבלית לפי הסעיף הקודם. באופן דומה יש איזומורפיזם $\phi^{-1} : H \to G$ ולכן אם H אבלית, אז גם G אבלית.

ג. שתי החבורות הן מסדר 16. לכן אם קיימת פונקציה על בינהן, אז היא גם חח"ע. כלומר אילו קיים φ אפימורפיזם כזה, אז זה איזומורפיזם. אבל D_8 לא אבלית ואילו U_{17} היא אבלית ולפי הסעיף הקודם נגיע לסתירה.

שאלה 3. הפריכו או הביאו דוגמא לשאלות הבאות:

א. קיים אפימורפיזם $f\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to (\mathbb{Q}^*, \cdot)$. (רמז: העזרו בשאלה קודמת)

ב. קיים מונומורפיזם $f\colon S_4 \to S_5$.

ג. קיים אפימורפיזם $f\colon \mathbb{Z}_{50} \to \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{10}$.

פתרון.

א. לא קיים, מכיוון ש$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ נוצרת סופית, ואילו $\mathbb{Q}^*$ לא נוצרת סופית. (הוכחנו באחד התרגולים)

ב. קיים. נשלח כל תמורה ל"עצמה", כלומר לאותה הפונקציה בדיוק על $\{1,..,4\}$ שאת 5 משאירה במקום. למשל $(1,2,3,4)$ הולך ל-$(1,2,3,4)$ רק שב-S_5 התמורה הזאת בעצם מסמלת את התמורה $(1,2,3,4)(5)$. קל לראות שזה הומומורפיזם ושהוא חח"ע.

ג. לא קיים, כי $\mathbb{Z}_{50}$ ציקלית, ואילו $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_{10}$ לא ציקלית. אפשר לראות את זה כי למשל הסדר של כל איבר ב $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_{10}$ הוא לכל היותר 10.

שאלה 4. בכל סעיף קבעו ונמקו האם החבורות איזומורפיות. רמז כללי: סדרים של איברים.

א. החבורה $\mathbb{Z}_{40}$ והחבורה $\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_4$.

ב. החבורה $\mathbb{Z}_{33}$ והחבורה $\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_3$.

ג. החבורה S_4 והחבורה $\mathbb{Z}_2\times A_4$.

ד. החבורה S_5 והחבורה D_{60}.

ה. החבורה $\mathbb{C}^*$ והחבורה

$$G=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\in M_2\left(\mathbb{R}\right):a^2+b^2>0\right\}$$

עם הפעולה של כפל מטריצות (שכבר הראיתם שהיא חבורה).

פתרון.

א. החבורות לא איזומורפיות. בחבורה $\mathbb{Z}_{40}$ יש איבר מסדר 40, ואילו בחבורה $\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_4$ הסדר המירבי של איבר הוא 20.

ב. החבורות איזומורפיות. אפשר לראות ששתיהן ציקליות, למשל $\langle 1\rangle=\mathbb{Z}_{33}$ ו-$\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_3=\langle(1,1)\rangle$, ואנחנו יודעים שמכל סדר יש רק חבורה ציקלית אחת עד כדי איזומורפיזם. בכיתה הראנו איזומורפיזם בין חבורות כאלו, ספציפית

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Z}_{33}&\to\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_3\\ x&\mapsto\left(x\left(\bmod 11\right),x\left(\bmod 3\right)\right)\end{aligned}$$

ג. החבורות לא איזומורפיות. ראינו בכיתה שהסדרים האפשריים של איברים ב-S_4 הם $1,2,3,4$. בחבורה $\mathbb{Z}_2\times A_4$ יש איברים מסדר 6, כמו למשל $(1,(123))$. למי שהחישוב אינו ברור, הזכרו מה הוא הסדר של איבר במכפלה קרטזית.

ד. החבורות לא איזומורפיות. ראינו בכיתה שהסדרים האפשריים של איברים ב-S_5 הם $1,2,\ldots,6$. בחבורה D_{60} יש איברים מסדר 60, כמו למשל σ.

ה. החבורות איזומורפיות. נגדיר את האיזומורפיזם $\varphi\colon G\to\mathbb{C}^*$ לפי $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ -b & a\end{smallmatrix}\right)\mapsto a+bi$. ברור כי זו העתקה חח"ע ועל (מי היא ההעתקה ההופכית?). נשאר להראות כי זהו הומומורפיזם של חבורות: יהיו איברים $M_1,M_2\in G$ ונרצה להראות כי $\varphi(M_1M_2)=\varphi(M_1)\varphi(M_2)$. נניח כי

$$M_1=\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\qquad\qquad M_2=\begin{pmatrix} c & d\\ -d & c\end{pmatrix}$$

ועל ידי חישוב ישיר נקבל את הדרוש:

$$\begin{aligned}\varphi(M_1M_2)&=\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d\\ -d & c\end{pmatrix}\right)=\varphi\left(\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc\\ -(ad+bc) & ac-bd\end{pmatrix}\right)\\ &=ac-bd+(ad+bc)i=(a+bi)(c+di)=\varphi(M_1)\varphi(M_2)\end{aligned}$$

שאלה 5. תהי G חבורה ותהי $H \leq G$. נגדיר את הליבה של H ב-G להיות

$$\mathrm{Core}(H) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$$

א. הוכיחו כי $\mathrm{Core}(H) \leq G$. רמז: יותר קל להתחיל בהוכחת $gHg^{-1} \leq G$ לכל $g \in G$.

ב. הוכיחו ש-$\mathrm{Core}(H)$ היא תת־החבורה הנורמלית הגדולה ביותר של G שמוכלת ב-H.

ג. תנו דוגמה לחבורה G, ולשתי תת־חבורות לא טריוויאליות H, K (הן לא G ולא $\{e\}$) כך ש-$\mathrm{Core}(H) = \{e\}$ וגם $\mathrm{Core}(K) = K$.

פתרון.

א. נעזר ברמז ונוכיח $gHg^{-1} \leq G$ לכל $g \in G$. יהיו $h_1, h_2 \in H$. נבדוק סגירות לכפל:

$$\left(gh_1g^{-1}\right)\left(gh_2g^{-1}\right) = gh_1(gg^{-1})h_2g^{-1} = gh_1h_2g^{-1} \in gHg^{-1}$$

כי $h_1h_2 \in H$. נבדוק סגירות להופכי:

$$(gh_1g^{-1})^{-1} = (g^{-1})^{-1}h_1^{-1}g^{-1} = gh_1^{-1}g^{-1} \in gHg^{-1}$$

כי $h_1^{-1} \in G$. נותר להראות ש-gHg^{-1} לא ריקה: היא מכילה את איבר היחידה כי $e = geg^{-1} \in gHg^{-1}$. מפני ש-$gHg^{-1} \leq G$ לכל $g \in G$, אז גם החיתוך של כולן הוא גם תת־חבורה. כלומר $\mathrm{Core}(H) \leq G$.

ב. מכיוון ש-$H = eHe^{-1}$ מופיע בחיתוך בהגדרת הליבה, אז ברור ש-$\mathrm{Core}(H) \subseteq H$. יהי $x \in \mathrm{Core}(H)$ ו-$a \in G$ ונראה ש-$\mathrm{Core}(H)$ סגורה להצמדה. נראה כי $axa^{-1} \in gHg^{-1}$ לכל $g \in G$, ונסיק ש-axa^{-1} שייך לחיתוך של כל gHg^{-1}, כלומר לליבה של H. אכן, מפני ש-$a^{-1}g \in G$, אז

$$x \in \mathrm{Core}(H) \subseteq a^{-1}gH\left(a^{-1}g\right)^{-1} = a^{-1}gHg^{-1}a$$

ולכן $axa^{-1} \in aa^{-1}gHg^{-1}aa^{-1} = gHg^{-1}$. לכן $\mathrm{Core}(H) \lhd G$.
תהי $N \lhd G$ תת־חבורה נורמלית. אז לכל $g \in G$, $N = gNg^{-1}$. אם $N \subseteq H$ נקבל

$$N = gNg^{-1} \subseteq gHg^{-1}$$

לכל $g \in G$. לכן $N \subseteq \bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = \mathrm{Core}(H)$.
דרך אחרת: ראינו ש-G פועלת על הקבוצה G/H ולכן יש הומומורפיזם $\varphi\colon G \to S_{G/H}$. אפשר לראות ש-$\ker\varphi = \mathrm{Core}(H)$, ולכן היא בודאי תת־חבורה נורמלית, וזה מוכיח גם את הסעיף הקודם.

ג. הבינו מדוע חייבים לבחור חבורה לא אבלית. אנחנו נבחר לדוגמה את $G = S_3$, $H = \langle(12)\rangle$ ו-$K = A_3$. מפני ש-$K \lhd G$, אז לפי הסעיף הקודם $\mathrm{Core}(K) = K$ כי היא תת־החבורה הנורמלית הגדולה ביותר של S_3 שמוכלת ב-K. ראינו בכיתה כי H אינה תת־חבורה נורמלית של S_3. לכן $\mathrm{Core}(H) \subsetneq H$. אבל H מסדר 2, ולכן בהכרח $\mathrm{Core}(H) = \{e\}$, שהיא מסדר 1.

שאלה 6. נגיד שחבורה היא פשוטה אם אין לה תת חבורות נורמליות פרט לעצמה ול-$\{e\}$.
תהי G חבורה פשוטה. הוכיחו כי אם $f\colon G \to H$ הוא הומומורפיזם אז הוא או שיכון או ההעתקה הטריוויאלית (ששולחת כל איבר לאיבר היחידה).

פתרון. אם $f\colon G \to H$ הומומורפיזם, אז $\ker f$ הוא תת־חבורה נורמלית של G. אבל G היא פשוטה ולכן או ש-$\ker f = \{e\}$, מה שאומר ש-f שיכון, או ש-$\ker f = G$, מה שאומר ש-f היא ההעתקה הטריוויאלית.

שאלה 7. בסעיפים הבאים, קבעו האם $H \triangleleft G$ (אין צורך לבדוק אם H היא תת־חבורה).

א. $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbb{R}, ac \neq 0 \right\}$, $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$.

ב. $G = GL_n(\mathbb{F})$, $H = \{\alpha I \mid \alpha \in \mathbb{F}^\times\}$.

ג. $G = GL_n(\mathbb{F})$. עבור $P \in GL_n(\mathbb{F})$ נתונה, $H = \{A \in GL_n(\mathbb{F}) \mid A^t P = PA^{-1}\}$.

ד. $G = S_n$, $H = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1\}$.

פתרון.

א. $H \triangleleft G$. אכן, לכל $h = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ ולכל $g = \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G$ מתקיים

$$ghg^{-1} = \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & c \\ 0 & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{bd}\begin{pmatrix} b & c \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -c \\ 0 & b \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{bd}\begin{pmatrix} b & ab+c \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -c \\ 0 & b \end{pmatrix} = \frac{1}{bd}\begin{pmatrix} bd & ab^2 \\ 0 & bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & abd^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ב. $H \triangleleft G$. אכן, $H = Z(G)$, ואנו יודעים כי תמיד $Z(G) \triangleleft G$.

ג. $H \ntriangleleft G$. אם נבחר למשל $P = I_n$, נקבל $H = \left\{A \in GL_n(\mathbb{F}) \,\middle|\, A^t = A^{-1}\right\}$ חבורת המטריצות האורתוגונליות. זו לא תת־חבורה נורמלית, כי למשל

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \in H$$

אבל

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & & & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \notin H$$

אינה אורתוגונלית (ניתן לבדוק ישירות).

ד. $H \ntriangleleft G$. אכן, $\sigma = (2\,3) \in H$, אבל $(1\,2)(2\,3)(1\,2) = (1\,3) \notin H$.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה שלחו לנו את הפתרון שלהן.

שאלה 8. יהי p ראשוני. נזכיר כי חבורה נקראת חבורת-p אם הסדר של כל איבר הוא חזקה של p. כמו כן ראינו שלחבורת-p סופית יש מרכז לא טריוויאלי. מצאו חבורת-p עם מרכז טריוויאלי.
הדרכה אפשרית (אם אתם מוצאים חבורות אחרות נשמח לשמוע): התבוננו על הקבוצה של כל המטריצות האינסופיות מעל $\mathbb{Z}_p$ מהצורה

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_\infty \end{pmatrix}$$

כאשר I_∞ היא מטריצת יחידה אינסופית, 0 היא מטריצת אפס בגודל מתאים והמטריצה $A \in GL_n(\mathbb{Z}_p)$ היא משולשית עליונה (סופית, עבור n טבעי כלשהו) עם אחדות על האלכסון.
הסבירו למה כפל מטריצות עדין מוגדר כאן (זה חשוב שבכל שורה ובכל עמודה יש רק מספר סופי של איברים לא אפסיים), והסיקו שמתקבלת חבורה. הוכיחו שהסדר של כל איבר הוא חזקה של p וכדי להראות שהמרכז טריוויאלי העזרו בזהויות הבאות על מטריצות בלוקים סופיות:

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & M \\ 0 & I_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

בהצלחה!