

אלגברה לינארית 2 (88113) תשובות למבחן מועד א'

1.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A), \det(A) = -2, \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. למשל}$$

ג. לפי תיקון בזמן המבחן, נדרש להוכיח רק עבור $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ הפיכות (אם כי בעזרת שיקולי רציפות ניתן להסיק זאת לכל $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$). עבור מטריצה A הפיכה: $\text{adj}(A) = \det(A) \cdot A^{-1}$, ולכן:

$$\text{adj}(AB) = \det(AB) \cdot (AB)^{-1} = \det(A) \det(B) B^{-1} A^{-1}$$

$$= \det(B) B^{-1} \det(A) A^{-1} = \text{adj}(B) \text{adj}(A)$$

2.

$$\text{א. פ"מ} = (x-3)(x-4) \text{ אם } a=0, (x-3)^2(x-4) \text{ אחרת.}$$

$$\text{ב. } a=0$$

$$\text{ג. } a=b=c=0$$

3.

$$\text{א. פ"מ} = \text{פ"א} = (x-1)^2$$

ב. אם הפ"א הוא $(x-a)(x-b)(x-c)$ כאשר $a, b, c \in \mathbb{C}$ שונים, אז שתי המטריצות דומות למטריצה האלכסונית $J_1(a) \oplus J_1(b) \oplus J_1(c)$

אם פ"א = פ"מ $(x-a)^2(x-b)$ כאשר $a, b \in \mathbb{C}$ שונים, אז שתיהן דומות למטריצה $J_2(a) \oplus J_1(b)$

אם פ"א = פ"מ $(x-a)^2(x-b)$ אבל פ"מ $(x-a)(x-b)$ כאשר $a, b \in \mathbb{C}$ שונים, אז שתיהן דומות למטריצה האלכסונית $J_1(a) \oplus J_1(a) \oplus J_1(b)$

אם פ"א = פ"מ $(x-a)^3$ כאשר $a \in \mathbb{C}$ שונים, אז שתיהן דומות למטריצה $J_3(a)$

אם פ"א = פ"מ $(x-a)^3$ אבל פ"מ $(x-a)^2$, אז שתיהן דומות למטריצה $J_2(a) \oplus J_1(a)$

אם פ"א = פ"מ $(x-a)^3$ אבל פ"מ $x-a$, אז שתיהן דומות למטריצה $J_1(a) \oplus J_1(a) \oplus J_1(a)$

ג. למטריצות $J_2(0) \oplus J_2(0)$, $J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0)$ יש פ"א x^4 ופ"מ x^2 .

4.

א. בודקים: לינאריות במשתנה ראשון, סימטריות וחיוניות.

ב. למשל, תהליך גרם-שמידט על הבסיס הסטנדרטי נותן: $((1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1))$.

ג. אי-שוויון קושי-שוורץ עבור הווקטורים $(1,2,2), (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ נותן:

$$|a+2b+2c| \leq \sqrt{(1^2+2^2+2^2)(a^2+b^2+c^2)} = \sqrt{9 \cdot 9} = 9$$

שוויון (עם הערך המוחלט) מתקיים אם ורק אם שני הווקטורים ת"ל, כלומר $(a, b, c) = k(1, 2, 2)$ עבור $k \in \mathbb{R}$. מקבלים אז $a + 2b + 2c = 9k$ ולכן בהכרח $k = 1$, כלומר $(a, b, c) = (1, 2, 2)$.

5.

- א. פ"א $(x - 2i)^2 x$, פ"מ $(x - 2i)x$.
 ב. A אנטי-צמודה לעצמה ($A^* = -A$), ולכן נורמלית ולכסינה (אוניטרית) מעל $\mathbb{C}$. היא איננה אוניטרית וגם לא צמודה לעצמה.
 ג. $\Leftarrow$: אם $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ צמודה לעצמה ואוניטרית אז $B = B^* = B^{-1}$. לכן היא לכסינה אוניטרית (בתור צמודה לעצמה) ומקיימת $B = B^{-1}$, כלומר $B^2 = I$.
 $\Rightarrow$: אם $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ לכסינה אוניטרית ומקיימת $B^2 = I$ אז היא דומה אוניטרית למטריצה אלכסונית D המקיימת $D^2 = I$. אברי האלכסון של D הם ± 1 , ולכן $D = D^* = D^{-1}$, כלומר: D צמודה לעצמה ואוניטרית. לכן גם B כזאת.