הבוחן נדחה ל-$21/12$
חומר- עד היום, כולל (חומר סופי יתפרסם בשבוע הבא)

קוסטים

1. תהי G חבורה ו-$H \leq G$, באמצעות H ניתן להגדיר שני יחסי שקילות על G:

- $g_1 \sim g_2$ אמ"ם $g_1^{-1} g_2 \in H$ (בהרצאה הוכחתם שאכן מתקבל יחס שקילות). מחלקות שקילות של יחס זה נקראים קוסטים שמאליים

- $g_1 \sim g_2$ אמ"ם $g_2 g_1^{-1} \in H$. מחלקות שקילות של יחס זה נקראים קוסטים ימיניים.

2. דוגמאות: תהא G חבורה.

(א) אם $H = G$ אזי כל שני איברים g_1, g_2 ב G מקיימים $g_1^{-1} g_2 \in G$ (וגם $g_2 g_1^{-1} \in G$) ולכן יש רק מחלקת שקילות אחת/קוסט שמאלי/קוסט ימני אחד.

(ב) $H = \{e\}$ אזי לכל שני איברים g_1, g_2 מתקיים $g_1^{-1} g_2 \in \{e\}$ אמ"מ $g_1^{-1} g_2 = e$ אמ"מ $g_1 = g_2$. במקרה הזה הקוסטים השמאליים הם

$$\{\{g\} \mid g \in G\}$$

ובאופן דומה אלו גם הקוסטים הימניים.

3. תיאור אלטרנטיבי לקוסט שמאלי/ימני. תהא G חבורה ו H ת"ח. הקוסט השמאלי של g היא

$$gH = \{gh \mid h \in H\}$$

וקוסט ימני של g הוא Hg.

4. דוגמאות נוספות:

(א) $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ו-$H = \mathbb{Z} \times \{0\}$. מצאו את הקוסטים השמאליים.
פתרון: יהא $g = (a, b)$ ב G. אזי הקוסט השמאלי

$$\begin{aligned} gH &= \{(a,b)(z,0) \mid z \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(a+z, b+0) \mid z \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(z,b) \mid z \in \mathbb{Z}\} \\ &= \mathbb{Z} \times \{b\} \end{aligned}$$

אלו בדיוק האיברים שמקיימים כי $-(a,b) + (z,b) \in H$.
הערה: כיוון ש G אבלית אזי $gH = Hg$ ולכן גם בעצם מצאנו את הקוסטים הימניים.

(ב) $G = S_3$ ו-$H = \langle (1,2) \rangle = \{id, (1,2)\}$. מצאו את הקוסטים השמאליים והימניים.
פתרון:
קוסטים שמאליים:

$$\begin{aligned} idH &= H = (1,2)\,H \\ (1,3)\,H &= \{(1,3), (1,2,3)\} = (1,2,3)\,H \\ (2,3)\,H &= \{(2,3), (1,3,2)\} = (1,3,2)\,H \end{aligned}$$

קוסטים ימניים:

$$Hid = H = H\left(1,2\right)$$
$$H\left(1,3\right) = \left\{\left(1,3\right),\left(1,3,2\right)\right\} = H\left(1,3,2\right)$$
$$H\left(2,3\right) = \left\{\left(2,3\right),\left(1,2,3\right)\right\} = H\left(1,2,3\right)$$

5. משפטים מההרצאה:
   - מספר הקוסטים הימניים שווה למספר הקוסטים השמאליים.
   - העוצמה של כל קוסט (ימני/שמאלי) שווה לעוצמת H.
   - במקרה ש Gסופית מתקיים $[G:H]=\frac{|G|}{|H|}$
   - הדגשים:
     - $gH=H$ אמ"ם $g\in H$.
     - $g_1H=g_2H$ אמ"ם $g_1^{-1}g_2\in H$ אמ"ם $g_2^{-1}g_1\in H$.

תח"נ

1. הגדרה: תהי G חבורה ו $H\leq G$ ת"ח. H נקראת תת חבורה נורמלית אם לכל איבר הקוסט הימני שלו שווה לקוסט השמאלי. כלומר, לכל $g\in G$, $gH=Hg$. (שוויון של קבוצות!)
2. דוגמאות בסיסיות:
   (א) $H=G$ היא תת חבורה נורמלית, כי $gG=G=Gg$
   (ב) $H=\{e\}$ ראינו ש $g\{e\}=\{g\}=\{e\}g$
   (ג) אם G היא חבורה אבלית, אז כל תת חבורה היא נורמלית.
3. תרגיל: תהי G אם H תת חבורה מאינדקס 2 היא נורמלית (למשל A_n היא תח"נ ב S_n למה? $|S_n|=n!$ ו $|A_n|=\frac{n!}{2}$ ולכן $[S_n:A_n]=\frac{n!}{\frac{n!}{2}}=2$)
הוכחה: נסמן את קבוצת הקוסטים השמאליים $\{H,gH\}$ כאשר $g\notin H$. כיוון ש $G=gH\uplus H$ (כי קבוצת מנה היא חלוקה של הקבוצה) נקבל ש $gH=G\backslash H$ באופן דומה, קבוצת הקוסטים הימניים $\{H,H\hat{g}\}$ כאשר $\hat{g}\notin H$ ומאותם נימוקים $H\hat{g}=G\backslash H$ ולכן לכל $a\in G$ מתקיים כי:
אם $a\in H$ אז $aH=H=Ha$
אחרת $a\notin H$ ולכן $aH\neq H$ וגם $Ha\neq H$ ולכן $aH=G\backslash H$ וגם $Ha=G\backslash H$ ולכן $aH=G\backslash H=Ha$.
4. קריטריון: H היא תת חבורה נורמלית אמ"ם היא סגורה להצמדות,
כלומר, לכל $g\in G$ מתקיים $gHg^{-1}\subseteq H$.
כלומר, לכל $g\in G$ ו$h\in H$ מתקיים $ghg^{-1}\in H$.
סימון: אם H תת חבורה נורמלית בG, מסמנים $H\trianglelefteq G$.
5. דוגמאות:
   (א) $SL_n(\mathbb{F})\trianglelefteq GL_n(\mathbb{F})$.
   הוכחה: ראיתם (אני מקווה) שזוהי ת"ח. נראה שהיא נורמלית. לכל $A\in GL_n(\mathbb{F})$ ולכן $B\in SL_n(\mathbb{F})$ צ"ל $ABA^{-1}\in SL_n(\mathbb{F})$. מהגדרה $|B|=1$ ולכן

$$\left|ABA^{-1}\right| = |A|\,|B|\left|A^{-1}\right| = |A|\left|A^{-1}\right| = 1$$

(ב) תהי G חבורה כלשהי ונגדיר

$$F=\prod_{i\in I}G$$

מימוש אפשרי ל F הוא קבוצת כל הפונקציות $f:I\to G$. כל $f:I\to G$ היא בעצם "Iיה" של איברים מ G.
פשוט $f(i)\in G$ (לכל $i\in I$)
האיברים הם וקטורים אינסופיים שבכל רכיב נמצא איבר מG והפעולה היא רכיב-רכיב, כלומר

$$(f_1f_2)(i)=f_1(i)f_2(i)$$

איבר היחידה הוא הוקטור הקבוע על e (כלומר הפונקציה הקבועה $f(i)=e$).
נשים לב: עבור $f\in F$ מתקיים ש

$$f^{-1}(i)=f(i)^{-1}$$

נגדיר את H להיות (התת חבורה) של כל הוקטורים שרק במספר סופי של רכיבים לא שווים לe. כלומר

$$H=\{g\in F\mid |\{i\in I\mid g(i)\neq e\}|<\infty\}$$

הוכיחו ש $H\trianglelefteq F$.
הוכחה: יהא $f\in F$ ו $g\in H$ צ"ל $fgf^{-1}\in H$. לכל $i\in I$ כך ש $g(i)=e$ מתקיים כי

$$fgf^{-1}(i)=f(i)g(i)f^{-1}(i)=f(i)f^{-1}(i)=e$$

ולכן מספר הרכיבים בהם fgf^{-1} שונה מ e מוכלת שווה למספר הרכיבים בהם g שונה מ e וזה מספר סופי לפי הגדרת H.

(ג) תהי G חבורה כלשהי. וH תת הקבוצה של כל האיברים מסדר סופי. הוכיחו שאם H היא תת חבורה, אז היא תת חבורה נורמלית.
הוכחה: נניח כי H ת"ח ונראה שהיא נורמלית. יהא $g\in G$ ו $h\in H$ צ"ל $ghg^{-1}\in H$. כיוון $h\in H$ יש לו סדר סופי שנסמנו k. ואז

$$\left(ghg^{-1}\right)^k=ghg^{-1}\cdot ghg^{-1}\cdots ghg^{-1}=gh^kg^{-1}=geg^{-1}=e$$

ולכן הסדר של ghg^{-1} קטן שווה מ k ובפרט סופי.

6. תרגיל: האם נורמליות היא טרנזיטיבית? כלומר, נניח ש$K\trianglelefteq H\trianglelefteq G$ האם זה אומר ש$K\trianglelefteq G$?
פתרון: $G=S_4$ ו

$$\begin{aligned}H&=\{(i_1,i_2)(i_3,i_4)\mid\{i_1,i_2,i_3,i_4\}=\{1,2,3,4\}\}\cup\{id\}\\&=\{id,(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\}\end{aligned}$$

למה H נורמלית ב G. לכל σ ב S_4 מתקיים

$$\sigma(i_1,i_2)(i_3,i_4)\sigma^{-1}=\sigma(i_1,i_2)\sigma^{-1}\sigma(i_3,i_4)\sigma^{-1}=(\sigma(i_1),\sigma(i_2))(\sigma(i_3),\sigma(i_4))$$

וגם $\langle(1,2)(3,4)\rangle$ נורמלי ב H. כי האינדקס הוא 2.
אבל $\langle(1,2)(3,4)\rangle$ לא נורמלי ב S_4 כי עבור $\sigma=(1,2,3)$ מתקיים

$$\sigma(1,2)(3,4)\sigma^{-1}=(2,3)(1,4)\notin\langle(1,2)(3,4)\rangle$$

דוגמה נוספת $G=\left\{\begin{pmatrix}\pm1 & 0\\ 0 & \pm1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & \pm1\\ \pm1 & 0\end{pmatrix}\right\}$ יש פה 8 איברים

$$H=\left\{\begin{pmatrix}\pm1 & 0\\ 0 & \pm1\end{pmatrix}\right\}$$

$$K=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}$$

נאמין בזה ש H ת"ח של G(היא נורמלית כי היא מאינקס 2) K ת"ח של H והיא נורמלית ב H כי מאינדקס 2 אבל K אינה נורמלית ב G (תצדיקו לבד).

חבורות מנה

תהי G חבורה ו $H \trianglelefteq G$. אז G/H = אוסף הקוסטים של H בG (השמאליים) מהווה חבורה, כאשר הפעולה היא כמו הפעולה של G על נציגים ממחלקות השקילות. עם הפעולה

$$(g_1H)(g_2H)=(g_1g_2)H$$

מי איבר היחידה?

$$H=eH$$

מי ההופכי של gH?

$$g^{-1}H$$

למעשה, מכפילים בצורה רגילה, וכל איבר בH שקול מבחינתנו לאיבר היחידה.
דוגמאות:

- $G=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ו $H=\mathbb{Z}\times\{e\}$. ברור ש H נורמלית ב G כי G אבלית. ואז

$$G/H=\{(a,b)\,G=\mathbb{Z}\times\{b\}\mid b\in\mathbb{Z}\}$$

והפעולה למשל

$$(1,2)\,G\,(-3,4)\,G=(-2,6)\,G$$

- $G=\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$ ו

$$H=\langle(1,1)\rangle=\{(x,x)\mid x\in\mathbb{Z}_4\}$$

אזי H נורמלית כי G אבלית. ננסה להבין את G/H.
פתרון: דבר ראשון $|H|=4$ ו $|G|=16$ ולכן בחבורת המנה יהיו $\frac{16}{4}=4$. יהא $(a,b)\in G$

$$(a,b)\,H=\{(a+x,b+x)\mid x\in\mathbb{Z}_4\}$$

לכן

$$(0,0)\,,(0,1)\,,(0,2)\,,(0,3)$$

נציגים של קוסטים שונים ולכן הם נציגים של כל איבר בחבורת המנה. מה הסדר של $(0,1)H$ ב G/H? תשובה: 4 ולכן החבורה ציקלית ומי שלמד איזומורפיזם היא פשוט איזומורפית ל $\mathbb{Z}_4$.

1. תרגיל: אם G אבלית אז G/H אבלית. האם להיפך?
פתרון: אם G אבלית אז ${}^{G}/_{H}$ אבלית. למה? כי

$$g_1Hg_2H = g_1g_2H = g_2g_1H = g_2Hg_1H$$

האם להיפך? חס וחלילה. למשל? S_n ו A_n מתקיים ש ${}^{S_n}/_{A_n}$ חבורה ציקלית כי יש בה 2 איברים ו 2 הוא ראשוני. וכמובן ש S_n אינה ציקלית.

2. תרגיל: אם G ציקלית אז G/H ציקלית. האם להיפך?
פתרון: אם G ציקלית אז ${}^{G}/_{H}$ ציקלית. הוכחה: אם $G = \langle g \rangle$ אזי ${}^{G}/_{H} = \langle gH \rangle$.
האם להיפך? חס וחלילה. למשל? S_n ו A_n מתקיים ש ${}^{S_n}/_{A_n}$ חבורה ציקלית כי יש בה 2 איברים ו 2 הוא ראשוני. וכמובן ש S_n אינה ציקלית.

3. תרגיל: תהי G חבורה כלשהי ונניח ש H קבוצה כל האיברים מסדר סופי היא ת"ח ולכן גם נורמלית. הוכיחו שב ${}^{G}/_{H}$ אין איברים מסדר סופי חוץ מאיבר היחידה (הקוסט H).
פתרון: נניח בשלילה כי gH מסדר סופי ו $g \notin H$ (בשביל ש $gH \neq H$). נסמן את הסדר ב k ואז נקבל לפי הגדרה ש

$$(gH)^k = H$$

כלומר

$$g^kH = H$$

ולכן $g^k \in H$ ולכן לפי הגדרת H נקבל ש g^k מסדר סופי, נסמן את הסדר ב m ונקבל ש $\left(g^k\right)^m = e$ כלומר $g^{km} = e$ כלומר g מסדר סופי ולכן $g \in H$. סתירה.