

קומבינטוריקה - תרגול 3

2 בנובמבר 2020

1 יחסים

הגדרה: תהיינה A, B קבוצות. תת קבוצה $R \subset A \times B$ נקראת יחס מ- A ל- B . יחס $R \subset A \times A$ נקרא יחס על A .
תכונות של יחסים:

• יחס R על קבוצה A ייקרא רפלקסיבי אם:

$$\forall a \in A : aRa$$

• יחס R על קבוצה A ייקרא אנטי-רפלקסיבי אם:

$$\forall a \in A : (a, a) \notin A$$

• יחס R על קבוצה A ייקרא טרנזיטיבי אם:

$$aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$$

• יחס R על קבוצה A ייקרא סימטרי אם:

$$aRb \Rightarrow bRa$$

• יחס R על קבוצה A ייקרא אנטי-סימטרי חלש אם:

$$aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$$

• יחס R על קבוצה A ייקרא אנטי-סימטרי חזק אם:

$$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R$$

תרגילים:

1. מצאו יחס על $A = \{1, 2, 3\}$ שהוא:

(א) סימטרי ואנטי-סימטרי חלש

$R = \{(1, 1)\}$. באופן כללי, כל יחס $R \subset id_A$ הוא סימטרי ואנטי-סימטרי

חלש. כאשר $id_A = \{(a, a) : a \in A\}$

מבין כל אלה, מי הוא גם אנטי-סימטרי חזק? $R = \emptyset$

(ב) לא סימטרי ולא אנטי-סימטרי חלש

$R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$. לא סימטרי כי $(3, 1) \notin R, (1, 3) \in R$ ולא

אנטי-סימטרי חלש כי $(2, 1) \in R, (1, 2) \in R$ אבל $1 \neq 2$.

(ג) רפלקסיבי ולא אנטי סימטרי חלש

$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$ הוא סימטרי וטרנזיטיבי.

(ד) אנטי סימטרי חלש ולא רפלקסיבי

$R = \{(1, 2)\}, S = \emptyset, S = \{(1, 1)\}$

(ה) רפלקסיבי ואנטי-סימטרי חלש וטרנזיטיבי

$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$

קיבלנו יחס סדר חלש שהוא לינארי (כלומר, לכל $a, b \in A$ מתקיים: $aRb \vee bRa$).

יחס זה הוא "קטן שווה" על A .

2. הוכיחו שיחס ההכלה על אוסף A של קבוצות הוא אנטי-סימטרי חלש.

פתרון: נניח שמתקיים $X \subset Y$ וגם $Y \subset X$. לפי מה שלמדנו מתקיים: $X = Y$.

מש"ל.

2 פונקציות

פונקציה מקבוצה A לקבוצה B היא יחס $f \subset A \times B$ נמקיים:

$$\forall a \in A \exists b \in B : afb$$

$$afb \wedge afc \Rightarrow b = c$$

לתנאי הראשון קוראין "שלם", לשני "חד-ערכי". מסמנים: $f : A \rightarrow B$, ואם afb אז נסמן $f(a) = b, a \mapsto b$.

דוגמאות:

• הבא לא פונקציה: $f \subset [-1, 1] \times [-1, 1]$ המוגדר ע"י

$$f = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

לא פונקציה כי לא חד-ערכית, למשל $(0, 1), (0, -1) \in f$ אבל $1 \neq -1$.

• $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = x^2$ כן פונקציה. פונקציה זו איננה חד-חד ערכית (חח"ע).