תרגול 1- דטרמיננטות

1 פיתוח לפי מינורים

1.1 פיתוח לפי שורה

כדי לחשב את הדטרמיננטה נבחר שורה ספיציפית (i) ונפעל לפי הנוסחא הבאה

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |M_{ij}|$$

כאשר M_{ij} נקרא המינור ה-ij של Aוהוא מתקבל על ידי מחיקת שורה i והעמודה ה-j של A.

2.1 פיתוח לפי עמודה

כדי לחשב את הדטרמיננטה נבחר עמודה ספיציפית (j) ונפעל לפי הנוסחא הבאה

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |M_{ij}|$$

כאשר M_{ij} נקרא המינור ה-ij של Aוהוא מתקבל על ידי מחיקת שורה i והעמודה ה-j של A.

תרגיל. נחשב את הדטרימננטה של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

פתרון. נפתח לפי העמודה הראשונה

$$
\begin{aligned}
&= \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\right| \\
&= (-1)^{1+1}\,1\left|\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}\right| + (-1)^{2+1}\,4\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}\right| + (-1)^{3+1}\,7\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}\right| - 4\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}\right| + 7\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}\right| - 4\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}\right| + 7\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\right| \\
&= (5\cdot 9 - 6\cdot 8) - 4\,(2\cdot 9 - 3\cdot 8) + 7\,(2\cdot 6 - 3\cdot 5) \\
&= -3 - 4\,(-6) + 7\,(-3) \\
& 0
\end{aligned}
$$

הערה. תכונות הדטרמיננטה.

1. $|AB| = |A|\,|B|$
2. $|A^t| = |A|$
3. $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$
4. לא מתקיים $|A+B| = |A| + |B|$!!
5. דטרמיננטה של מטריצה משולשית היא כפל איברי האלכסון.
6. מטריצה A הפיכה אם"ם $|A| \neq 0$

הערה. השפעות פעולות שורה על הדטרמיננטה:

1. המטריצה B מתקבלת על ידי ביצוע הפעולה $R_i \leftrightarrow R_j$ על המטריצה A אז $|B| = -|A|$
2. המטריצה B מתקבלת על ידי ביצוע הפעולה $R_i \leftrightarrow \alpha R_i$ על המטריצה A אז $|B| = \alpha\,|A|$
3. המטריצה B מתקבלת על ידי ביצוע הפעולה $R_i \leftrightarrow R_i + \alpha R_j$ על המטריצה A אז $|B| = |A|$

תרגיל. חשב את הדטרמיננטה של המטריצה $A = \begin{pmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

פתרון. נבצע פעולות שורה על הדטרמיננטה כדי לפשט

$$\left|\begin{pmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| \overset{R_2\leftarrow R_2+R_1}{=}$$

$$\left|\begin{pmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ \cos^2\alpha+\sin^2\alpha & \cos^2\beta+\sin^2\beta & \cos^2\gamma+\sin^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| \overset{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1}{=}$$

$$\left|\begin{pmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| \overset{R_3\leftarrow R_3-R_2}{=}$$

$$\left|\begin{pmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| =$$

$$0$$

תרגיל. הוכח שמטריצה אנטי סימטרית מסדר אי זוגי היא לא הפיכה.

פתרון. תהי Aמטריצה אנטי סמטרית אז היא מקיימת $-A = A^t$ לכן $|-A| = |A^t|$כלומר $(-1)^n |A| = |A^t|$. כזכור לכל מטריצה מתקיים $|A| = |A^t|$. ועבור מטריצה אנטי סמטרית יתקיים

$$|A| = \left|A^t\right| = (-1)^n |A|$$

אם n אי זוגי אז

$$|A| = -|A|$$

ולכן

$$|A| = 0$$

כלומר A לא הפיכה.

תרגיל. הוכח הפרך: Aהפיכה אם ורק אם AA^t הפיכה.

פתרון. נכון.

$$\begin{gathered} A \quad \text{invertible} \\ \Updownarrow \\ |A| \neq 0 \\ \Updownarrow \\ |A|\,|A| \neq 0 \\ \Updownarrow \\ |A|\,|A^t| \neq 0 \\ \Updownarrow \\ |AA^t| \neq 0 \\ \Updownarrow \\ AA^t \quad \text{invertible} \end{gathered}$$

תרגיל. הוכח הפרך: Aהפיכה אם ורק אם $A + A^t$הפיכה.

פתרון. לא נכון. ניקח $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

תרגיל. הוכח הפרך:לכל A סמטרית מתקיים Aהפיכה אם ורק אם $A+A^t$הפיכה.

פתרון. נכון.

$$\begin{gathered} A+A^t \quad \text{invertible} \\ \Updownarrow \\ |A+A^t| \neq 0 \\ \Updownarrow \\ |A+A| \neq 0 \\ \Updownarrow \\ |2A| \neq 0 \\ \Updownarrow \\ 2^n\,|A| \neq 0 \\ \Updownarrow \\ |A| \neq 0 \\ \Updownarrow \\ A \quad \text{invertible} \end{gathered}$$

תרגיל. A הפיכה אם ורק אם A^3+I הפיכה.

פתרון. לא נכון. ניקח $A=-I$