תרגול 7 – מופשטת 2016

**מרכז של חבורה**

הגדרה: תהי חבורה, אז **המרכז של** הוא: (כלומר המרכז הוא קבוצת כל האיברים  שמתחלפים עם כל אברי .)

דוגמה: אםאבלית אז .

שימו לב:

1. המרכז תמיד לא ריק(כי);
2. המרכז הוא תת חבורה אבלית ונורמלית.

**חבורת המנה**

נתבונן באוסף המחלקות הימניות . אם  ניתן להגדיר על אוסף זה את הפעולה הבאה: . איבר היחידה ביחס לפעולה החדשה הוא . במקרה זה  היא חבורה ביחס לפעולה זו והיא נקראת חבורת המנה.

דוגמה: תהי  ונתבונן בתת חבורה הנורמלית שלה . אזי:  ואלה הם הישרים המקבילים לציר האיקס.

הערה

עבור חבורה סופית ,  ,  היא אוסף המחלקות השמאליות ולכן מתקיים: .

**תרגיל**

הוכיחו את הטענה הבאה: תהי חבורה (לאו דווקא סופית) ו-. נניח ש-. אזי לכל  מתקיים .

הוכחה

יהי , אזי .  ולכן  ולכן .

[תזכורת: לפי מסקנה ממשפט לגרנז' מתקיים .]

מש"ל

**תרגיל**

תהי  תת חבורה מאינדקס 2. אזי  היא חבורה אבלית.

הוכחה

ראינו כבר שבתנאים הללו  ולכן  היא חבורה. כעת, . החבורה היחידה מסדר 2 היא  ולכן  היא אבלית. מש"ל

**טענה**

נגדיר . אם  איננו איבר היחידה, אזי הוא מסדר אינסופי.

הוכחה

יהי  אזי קיים  כך ש-. לפי הנתון  איננו איבר היחידה ולכן , כלומר  ולכן . כעת, נניח בשלילה ש-. אזי מחד: . מאידך:  ולכן  ולכן ; כלומר קיים  כך ש-. כלומר  בסתירה להנחה. לכן הסדר של  הוא אינסוף.

מש"ל

**משפט האיזומורפיזם ה-1**

תהיינה  חבורות ויהי  אפימורפיזם אזי .

אם  הוא הומומורפיזם (לא בהכרח אפימורפיזם) אזי .

**תרגיל**

נניח שקיים הומומורפיזם . מה יכול להיות הגרעין של ?

פתרון

מכיוון ש- מתקיים  ולכן . נבדוק את כל האפשרויות:

1. : לכן  חח"ע וממשפט האיזומורפיזם הראשון נקבל ש- ולכן .  ולכן ; אך 14 אינו מחלק את 20 ולכן .
2. : במקרה זה . ושוב, מכיוון ש-7 אינו מחלק את 20 – נקבל סתירה.
3. : נראה שקיים הומומורפיזם כזה: ניקח תת חבורהמסדר 2 ב  ונבנה אפימורפיזם. כמו כן, מכיוון שהגרעין הוא תת חבורה מסדר ראשוני 7, מתקיים .
4. : גם מקרה זה אפשרי, ונקבל  עם ההומומורפיזם הטריוויאלי.

מש"ל

**טענה**

תהי חבורה. נניח ש- היא ציקלית, אזי היא טריוויאלית (). כלומר, אם המנה של חבורה במרכז שלה היא ציקלית, אזי החבורה היא אבלית (ואז המנה היא טריויאלית. לכן, אם  חבורה לא אבלית, המנה  אינה יכולה להיות ציקלית; וזהו השימוש העיקרי של הטענה הזאת.)

פתרון

נניח ש-  ציקלית. נראה ש- . מציקליות קיים  עבורו . נסמן . ידוע שמתקיים:  (סימון של איחוד זר). כעת, לכל  קיים  מסוים כך ש-; כלומר קיים  כך ש-.יהיו  שני איברים שרירותיים. אזי לפי כל הנאמר לעיל, קיימים  כך ש- . מתקיים:  וקיבלנו ש- אבלית. אך אז  ולכן .

מש"ל

**משפט האיזמורפיזם ה-2**

תהי  חבורה ו- תתי חבורות. אזי:

1. ;
2. .

**תרגיל**

תהי  חבורה מסדר סופי ו- כך ש-. הוכיחו ש- מכילה "כל מה שהיא יכולה", כלומר כל תת-חבורה של  שהסדר שלה מחלק את הסדר של מוכלת ב-. הסיקו כי  היא תת-החבורה היחידה של  מסדר .

פתרון

תהי  המקיימת . בגלל ש,  הינה תת-חבורה של , ובפרט (מדוע? בגלל התורשתיות). כמובן שגם  הינה תת-חבורה של , של  ושל . מכפליות האינדקס מתקיים , ומכאן רואים ש- .

מכיוון ש, לפי משפט האיזומורפיזם השני מתקיים  ובפרט . מכאן רואים ש- ולכן . לבסוף מקבלים  ולכן . מכאן:  ולכן  והוכחנו הדרוש.

(לא לשכוח להסיק את מה שביקשו...)

מש"ל

**אוטומורפיזמים**

תהי  חבורה, אזי  היא חבורת האוטומורפיזמים של .

דוגמה

תהי חבורה אבלית מסדר סופי  ויהי  כך ש- . אזי ההעתקה  המוגדרת ע"י  היא איזומורפיזם ולכן אוטומורפיזם.

למשל, עבור  המיפוי  הוא אוטומורפיזם של  מכיוון ש-.

**טענה** (הוכחתם בהרצאה)

1. ;
2. .

**תרגיל**

תהיה .הוכיחו כי .

פתרון

ידוע. אוטומורפיזם יעביר את איבר היחידה לעצמו ונשאר לראות לאן עוברים שלושת האיברים הלא אפסיים.הוא חח"ע ועל ולכן יעביר אותם לתמורה של , כלומר אפשר לזהות את  כתת קבוצה של . נשאר לראות ש**כל** תמורה ב- היא אכן איזומורפיזם.

כל שני איברים לא אפסיים שונים יוצרים את, והמכפלה של שניהם היא האיבר הלא אפסי השלישי.נניח הם היוצרים וכך נוכל להתאים לכל תמורה איזומורפיזם: יש 3 אפשרויות לאן לשלוח את , ואז 2 אפשרויות עבור ונשארים עם אפשרות יחידה עבור . שזה כמו ביצירת תמורה ב-.

מש"ל

**טענה**

לכל שתי חבורות  יש שיכון $Aut(G)×Aut\left(H\right)↪Aut(G×H)$.

פתרון

נגדיר  ע"י  כאשר . ניתן לבדוק שאם  וכן אז  (לא נעשה זאת). אנו נוכיח רק ש מונומורפיזם. תחילה נוכיח הומומורפיזם: , . עלינו להראות ששתי הפונקציות שוות. לכלמתקיים וכן . חח"ע נובעת מחח"ע בכל רכיב.

מש"ל