מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 5 (פתרון)

1. להוכחה נתבונן בקבוצת תת-קבוצות σ שאיבריה הם המשלימים של איבריה של τ:
$\sigma = \{X\} \cup \{F \subseteq X | \, |F| \leq \aleph_0\}$. מספיק לבדוק שלאיברים של σ מתקיימות שלושת התכונות הבסיסיות של קבוצות סגורות:
   i. יהיו $A_\alpha \in \sigma$ לכל $\alpha \in \Lambda$. אם קיים α_0 כך ש- A_{α_0} בת מניה או סופית אז כל החיתוך $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \subseteq A_{\alpha_0}$ הוא קבוצה בת מניה או סופית ולכן שייך ל-σ . אחרת: $A_\alpha = \mathrm{X}$ לכל $\alpha \in \Lambda$ ו-$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = X \in \sigma$.
   ii. יהיו $A_i \in \sigma$ לכל i : $1 \leq i \leq n$. אם קיים i_0 כך ש- $X = A_{i_0}$ אז כל האיחוד $A_1 \cup \ldots \cup A_n = X \in \sigma$. אחרת: האיחוד הוא קבוצה בת מניה או סופית ולכן שייך ל-σ .
   iii. $X \in \sigma$ לפי ההגדרה של σ. $\emptyset \in \sigma$ כקבוצה סופית.

2. נגדיר פונקציה $f: X \to \mathbb{R}$ כך ש- $f(x) = d(a_1, x) - d(a_2, x)$ לכל $x \in X$. תהא טופולוגיה ב- $\mathbb{R}$ מושרת על ידי מטריקה רגילה.
נוכיח ש-f רציפה ובשביל זה נוכיח ש-f רציפה בכל נקודה.
תהא b נקודה כלשהי ב-X ו- V סביבה של $f(b)$ ב-$\mathbb{R}$.
אזי קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $B(f(b), \varepsilon) \subseteq V$. נקח $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.
יהי $d(x, b) < \delta$. אז לפי אי שוויון המשולש עבור מטריקה ב-$\mathbb{R}$:

$$|f(x) - f(b)| = |d(a_1, x) - d(a_2, x) - d(a_1, b) + d(a_2, b)| \leq$$
$$|d(a_1, x) - d(a_1, b)| + |d(a_2, x) - d(a_2, b)| \leq$$

[לפי אי שוויון המשולש עבור מטריקה ב-X]

$$\leq d(x, b) + d(x, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

במילים אחרות קיבלנו: $d(x, b) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(b)| < \varepsilon$
או - במינוח מרחבים טופולוגיים, אם נסמן $B(b, \delta)$ ב-U – $f(U) \subseteq B(f(b), \varepsilon) \subseteq V$.
הוכחנו ש-f רציפה בכל נקודה $b \in X$, לכן <u>f רציפה</u>.

לפי הגדרה של f : $d(a_1, x\} = d(a_2, x) \Leftrightarrow f(x) = 0$
לכן $Y = f^{-1}(\{0\})$. אבל $\{0\}$ – קבוצה סגורה ב-$\mathbb{R}$
כי $\{0\}^c = (0, \infty) \cup (-\infty, 0)$ קבוצה פתוחה.
אזי מרציפות של f נובע ש- $Y = f^{-1}(\{0\})$ סגורה כתמונה הפוחה של קבוצה סגורה, מש"ל.

3. א' <u>אנחנו נוכיח תכונות "a-h" בסדר הבא: a,c,b,e,d,f,g,h</u>

"a" <u>$A \subseteq Cl(A)$</u> :A מוכלת בכל קבוצה מהחיתוך של ההגדרה, אזי היא מוכלת בחיתוך עצמו.

"c" <u>$Cl(A)$ קבוצה סגורה</u>: כחיתוך סגורות.

"b" <u>$A \subseteq B \Rightarrow Cl(A) \subseteq Cl(B)$:</u> לפי "a" $A \subseteq B \subseteq Cl(B)$.
לפי "c" $Cl(B)$ סגורה. אבל לפי ההגדרה $Cl(A)$ מוכלת בכל תת-קבוצות סגורות המכילות את A. לכן $Cl(A) \subseteq Cl(B)$.

"e" <u>A סגורה $\Leftrightarrow Cl(A) = A$</u> :
<u>$\Leftarrow$</u> לפי "a" $A \subseteq Cl(A)$. אבל A סגורה ומכילה את עצמה ולכן מכילה את $Cl(A)$ לפי הגדרת הסגור. אזי $Cl(A) = A$.
<u>$\Rightarrow$</u> לפי "c" $Cl(A)$ סגורה. אזי A סגורה.

"d" <u>$Cl(Cl(A)) = Cl(A)$</u> : לפי "c" $Cl(A)$ סגורה. לכן לפי "e" מקבלים $Cl(Cl(A)) = Cl(A)$.

"f" <u>נקודה p שייכת ל- $Cl(A)$ א"א כל סביבה של p נחתכת עם A.</u>
<u>$\Leftarrow$</u> נניח $p \in Cl(A)$ ו-(בדרך השלילה) קיימת סביבה U של p כך ש- $U \cap A = \emptyset$. אזי U^c סגורה ו- $A \subseteq U^c$. אז לפי הגדרת הסגור $Cl(A) \subseteq U^c$ ולכן- $p \in U^c$. סתירה.
<u>$\Rightarrow$</u> נניח כל סביבה של p נחתכת עם A ו-(בדרך השלילה) $p \notin Cl(A)$. אזי לפי "c" $Cl(A)$ קבוצה סגורה ולכן $(Cl(A))^c$ פתוחה . מכיוון ש- $p \in (Cl(A))^c$ $(Cl(A))^c$ אמורה להיחתך עם A, אבל זה לא יכול להיות כי $(Cl(A))^c \subseteq A^c$ לפי "a".
. סתירה.

"g" <u>$Int(A)$ קבוצה פתוחה</u>: כאיחוד קבוצות פתוחות.

“h” $Int(A)$ היא קבוצה של **כל** הנקודות הפנימיות ב-A .

(a פנימית $\Leftarrow a \in Int(A)$) אם $a \in A$ נקודה פנימית של A אז קיימת סביבה פתוחה $U \subseteq A$ של a ולכן $a \in U \subseteq Int(A)$ לפי ההגדרה של $Int(A)$.

($a \in Int(A)$ a $\Leftarrow$ פנימית) $Int(A) \subseteq A$ לפי ההגדרה, ולפ “g” $Int(A)$ קבוצה פתוחה. לכן אם $a \in Int(A)$, אז a נקודה פנימית של A.

ב' לפי הגדרת הסגור ותורת הקבוצות:

$$Cl(A^c) = \bigcap_{\substack{A^c \subseteq F \subseteq X \\ \text{סגורה } F}} F = \bigcap_{\substack{A^c \subseteq U^c \subseteq X \\ \text{פתוחה } U}} U^c = \bigcap_{\substack{U \subseteq A \subseteq X \\ \text{פתוחה } U}} U^c$$

לפי חוקי דה מורגן והגדרת הפנים:

$$\left(Cl(A^c)\right)^c = \bigcup_{\substack{U \subseteq A \subseteq X \\ \text{פתוחה } U}} U = Int(A)$$

מש"ל.

ג' לפי א' -“e”,“b” , “d” ,“f”,“g” ותורת הקבוצות:

$$Cl\big(Cl(A) - Int(A)\big) = Cl\Big(Cl(A) \cap \big(Int(A)\big)^c\Big)$$
$$\subseteq Cl\big(Cl(A)\big) \cap Cl\Big(\big(Int(A)\big)^c\Big) = Cl(A) \cap \big(Int(A)\big)^c$$
$$= Cl(A) - Int(A)$$

אבל לפי א' -“a” $Cl(A) - Int(A) \subseteq Cl\big(Cl(A) - Int(A)\big)$ ואז $Cl(A) - Int(A) = Cl\big(Cl(A) - Int(A)\big)$.

לכו לפי א' -“e” $Cl(A) - Int(A)$ סגורה. מש"ל.

<u>תזכורת.</u> ידוע מקורסים הקודמים:

<u>ת1).</u> בין שני מספרים ממשיים שונים קיים מספר רציונלי.

<u>ת2).</u> עוצמה של כל קטע ב-$\mathbb{R}$ (חוץ מנקודון) גדולה מ-$\aleph_0$.

4. תשובה: $Int\,(A)=\emptyset$.
הוכחה. נניח בדרך השלילה שקיימת נקודה $x\in Int\,(A)$.
אזי לפי 3-א'-"g" והגדרת הפנים קיים $\varepsilon>0$
כך ש- $x\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq Int\,(A)\subseteq A$.
אבל לפי "ת2" עוצמה של $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ גדולה מ-$\aleph_0$. סתירה.

5. הוכחה. בכל קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{R}$ מוכל קטה פתוח. אבל לפי "ת1" בכל קטע פתוח מוכל מספר רציונלי, ז"א, מספר מ-$\mathbb{Q}$. לכן $\mathbb{Q}$ צפופה ב-$\mathbb{R}$.
$\mathbb{Q}$ - קבוצה בת מניה לכן לפי "ת2" בכל קטה פתוח יש מספרים מ-$\mathbb{Q}^c$.
לכן באותה לוגיקה $\mathbb{Q}^c$ צפופה ב-$\mathbb{R}$.

6. הוכחה. נניח בדרך השלילה שקיימת נקודה $x\in X$ כך ש-$f(x)\neq g(x)$, זאת אומרת, $0<d\big(f(x),g(x)\big)=\varepsilon$.
מכיוון ש- f,g רציפות אז כל אחת מהן רציפה בנקדה x.
נזכיר שכדורים פתוחים הם קבוצות פתוחות במרחב מטרי.
לכן לפי הגדרת רציפות פונקציה בנקדה אנחנו מקבלים:
קיימת סביבה U_x של x כך ש- $f(U_x)\subseteq B(f(x),\frac{\varepsilon}{2})$,
וקיימת סביבה V_x של x כך ש- $g(V_x)\subseteq B(g(x),\frac{\varepsilon}{2})$.
נקח $W_x=U_x\cap V_x$. אזי W_x קבוצה פתוחה ולכו מכילה נקודות מ-A (בגלל הצפיפות A ב-X). אבל אם $a\in W_x\cap A$,
אז $f(a)=g(a)$ כי $g|_A = f|_A$. יהי $b=f(a)=g(a)$.
אז מקבלים:
$$b\in f(W_x)\subseteq f(U_x)\cap f(V_x)\subseteq B(f(x),\tfrac{\varepsilon}{2})\cap B(g(x),\tfrac{\varepsilon}{2})=\emptyset\ .$$
סתירה.