ליכסון

9 במאי 2016

תזכורת: פ"א (ר"א), ע"ע, ו"ע, מרחב עצמי (ר"ג) . הערה: הגדרות דומות קיימות עבור אופרטור $T:V\to V$

- אם $Tv=\lambda v$ כאשר $v\neq 0$ אזי v ו"ע, λ ע"ע של T (בש.ב. ראיתם את הקשר בין ו"ע של T לבין ו"ע של מטריצה מייצגת)
- פ"א של T הוא $P_T(\lambda)=\left|\lambda I-[T]_B^B\right|$ כאשר B בסיס כל שהוא (לא תלוי בבחירת בסיס)
- מרחב עצמי של λ הוא $V_\lambda=\{v:Tv=\lambda v\}$

הגדרה: $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ תקרא לכסינה אם A צמודה למטריצה אלכסונית (כלומר קיים Pהפיכה כך ש $P^{-1}AP=D$ אלכסונית)

דוגמא: עבור $A=\begin{pmatrix}5&6\\-3&-4\end{pmatrix}$ ראינו כי $\{\lambda_1=2,\lambda_2=-1\}$ע"ע

ו $\{v_1=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\}$ו"ע בהתאמה.

נגדיר $P=\begin{pmatrix}-2&-1\\1&1\end{pmatrix}$ (הו"ע בעמודות P) כעת:

$$\begin{aligned}AP&=A(v_1,v_2)=(Av_1,Av_2)\\&=(\lambda_1v_1,\lambda_2v_2)=(v_1,v_2)\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\\&=P\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

כלומר, קיבלנו כי $AP=PD$. כיוון שו"ע אלו בת"ל נקבל ש Pהפיכה ואז בהכפלה ב P^{-1} משמאל נקבל כי

$$P^{-1}AP=D$$

כלומר A לכסינה.

משפט: תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אזי הבאים שקולים.

- $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה
- יש בסיס של ו"ע ל $\mathbb{F}^n$
- יש n ו"ע בת"ל
- הפ"א $P_A(\lambda)=\prod_{i=1}^{m}(\lambda-\lambda_i)^{\alpha_i}$ (λ_i-ים שונים) מתפרק לגורמים לינארים (מל"ל) + לכל ע"ע ר"ג=ר"א
- הפ"מ $m_A(\lambda)=\prod_{i=1}^{m}(\lambda-\lambda_i)$ (λ_i-ים שונים) מתפרק לגורמים לינארים (מל"ל) ממעלה 1

הערה:

- כאשר A לכסינה - Pמורכבת מו"ע (בת"ל) , D מורכבת מע"ע בהתאמה.
- אופרטור $T:V\to V$ יקרא לכסין אם קיים בסיס B כך ש $[T]_B^B$ אלכסונית
  - כלומר, יהא C בסיס ל V אזי : T לכסינה אמ"מ $[T]_C^C$ לכסינה

ראינו בתרגיל קודם כי עבור $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. מתקיים כי $f_A(\lambda)=(\lambda-1)^2\lambda^2$ כלומר מל"ל. ע"ע $\lambda_1=1,\ \lambda_2=0$.

ומתקיים כי ר"א=ר"ג עבור $\lambda_1=1$. אך לא עבור $\lambda_2=0$ ולכן Aאינה לכסינה.

תרגיל: קבע האם $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$לכסינה כאשר:

1. $A\in\mathbb{R}^{2\times2}$ מטריצה ממשית.

פתרון: $f_A(\lambda)=|\begin{pmatrix}\lambda&-1\\1&\lambda\end{pmatrix}|=\lambda^2+1$ כיוון של f_A אין שורשים בממשים בפרט אין ל A ו"ע ולכן A אינה לכסינה.

2. $A\in\mathbb{C}^{2\times2}$מטריצה מרוכבת.

פתרון: $f_A(\lambda)=\lambda^2+1$ השורשים הם $\lambda_1=i,\ \lambda_2=-i$ נמצא ו"ע. (תזכורת עבור $p(x)\in\mathbb{R}[x]$ פולינום ממשי. אם $p(z)=0$ אזי $p(\bar{z})=0$).

תזכורת מש.ב. אם ל A יש n ע"ע שונים אזי יש בסיס של ו"ע ולכן A לכסינה. לכן אצלנו A לכסינה.

[חישוב מפורש עבור $\lambda_1=i$. $N(\begin{pmatrix}-i&1\\-1&-i\end{pmatrix})=N(\begin{pmatrix}-i&1\\0&0\end{pmatrix})$ ולכן $v_1=\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$ ו"ע.

עבור $\lambda_1=-i$. $N(\begin{pmatrix}i&1\\-1&i\end{pmatrix})=N(\begin{pmatrix}i&1\\0&0\end{pmatrix})$ ולכן $v_2=\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$ ו"ע.

קל לראות ש $\{v_1,v_2\}$ בת"ל ולכן לפי השלישי חינם בסיס ל $\mathbb{C}^2$ ולכן A לכסינה.]

תרגיל: האם כל מטריצה $A\in\mathbb{C}^{2\times2}$ לכסינה?

פתרון: לא! למשל $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. $f_A(\lambda)=|\begin{pmatrix}\lambda-1&-1\\0&\lambda-1\end{pmatrix}|=(\lambda-1)^2$. $\lambda=1$ ע"ע יחיד.

ו"ע: $N(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix})$ ולכן $v=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ו"ע יחיד בפרט אין בסיס של ו"ע ל $\mathbb{C}^2$ ולכן A אינה לכסינה.

תרגיל: תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה. יהיו $\lambda_1\dots\lambda_n$ הע"ע שלה. הוכח $|A|=\prod\limits_{k=1}^{n}\lambda_k$ וגם $tr(A)=\sum_{i=1}^n\lambda_i$ (כלומר הדטרמינטטה שווה למכפלה הע"ע והעקבה לסכום הע"ע)

פתרון: נתון כי קיימת P כך ש $P^{-1}AP=D$ ובנוסף, למטריצות דוצמודות יש אותה דטרמיננטה ואותה עקבה.

תרגיל: תהא $A=\begin{pmatrix}5&6\\-3&-4\end{pmatrix}$חשב את A^{2000}. ראינו כי עבור $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&2\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}-2&-1\\1&1\end{pmatrix}$
מתקיים כי $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}$ או לחילופין

$$A=P\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}$$

כעת

$$
\begin{aligned}
A^{2000} &= \left(P\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}\right)^{2000}\\
&= \left(P\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}\right)\cdot\left(P\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}\right)\cdots\left(P\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}\right)\\
&= P\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}^{2000}P^{-1} = P\begin{pmatrix}2^{2000}&0\\0&(-1)^{2000}\end{pmatrix}P^{-1}
\end{aligned}
$$

תרגיל: הוכח ש $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\7&2&0\\0&\sqrt{17}&3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&-1&5\\0&2&6\\0&0&3\end{pmatrix}$ מטריצות צמודות.

תרגיל: לשתיהן יש 3 ע"ע שונים שהם $1,2,3$ ולכן לכסינות. לכן קיימות P,Q הפיכות כך ש

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}=Q^{-1}BQ$$

ולכן

$$A=\left(QP^{-1}\right)^{-1}B\left(QP^{-1}\right)$$

רלמר A,Bצמודות ע"י המטריצה QP^{-1} (שהיא הפיכה כמכפלה של הפיכות)