

**שאלה 1.** (חימום) יהי  $\psi: H \rightarrow K$ ,  $\phi: G \rightarrow H$  הומומורפיזמים. הראו כי  $\phi \circ \psi$  הוא הומומורפיזם. **פתרון.** ראשית, ברור כי  $\phi \circ \psi$  היא פונקציה. לכן עלינו רק להראות כי היא כפלית, נחשב:

$$\phi \circ \psi(gh) = \phi(\psi(g)\psi(h)) = \phi(\psi(g)) \cdot \phi(\psi(h)) = \phi \circ \psi(g) \cdot \phi \circ \psi(h)$$

**שאלה 2.** (חימום) תהי  $G, H$  חבורות ו  $\phi: G \rightarrow H$  מונומורפיזם. הראו כי עבור  $g \in G$  כך ש  $o(g) = n$  אזי  $o(\phi(g)) = n$ .

**פתרון.** ראינו בתרגול כי  $n \mid o(\phi(g))$ . בכדי להראות שוויון מספיק להראות כי  $n \mid o(\phi(g))$ . נחשב:  $e = \phi(g)^{o(\phi(g))} = \phi(g^{o(\phi(g))}) = \phi(e) = e$  ומכאן נובע כי  $n \mid o(\phi(g))$ .

**שאלה 3.** יהי  $\phi: G \rightarrow H$  הומומורפיזם.

- (1) הוכיחו כי אם  $G$  אבליה אזי גם  $\text{Im } \phi$  אבליה. הפריכו את הכיוון השני.
- (2) הסיקו מסעיף קודם כי אם  $G \cong H$  אזי  $G$  אבליה אם ורק אם  $H$  אבליה.
- (3) הוכיחו או הפריכו: קיים מונומורפיזם  $\phi: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \rightarrow S_4$ .

**פתרון.**

- (1) יהי  $h_0, h_1 \in \text{Im } \phi$  לכן נוכל לבחור  $g_0, g_1 \in G$  כך ש  $\phi(g_0) = h_0, \phi(g_1) = h_1$ . נחשב:  $h_0 \cdot h_1 = \phi(g_0) \cdot \phi(g_1) = \phi(g_0 g_1) = \phi(g_1 g_0) = \phi(g_1) \cdot \phi(g_0) = h_1 \cdot h_0$  לכן  $\text{Im } \phi$  אבליה לפי הגדרה. בכיוון השני ניקח  $G = S_3$  ו-  $H$  חבורה כלשהי. נסתכל על  $\phi$  ההומומורפיזם הטריטוריאלי. כעת ברור כי  $\text{Im } \phi = \{e\}$  היא אבליה, אבל עם זאת, ראינו כי  $S_3$  אינה אבליה.
- (2) נניח כי  $G$  איזומורפית ל  $H$  אזי קיים איזומורפיזם  $\phi$  בין  $G$  ל-  $H$ . נניח  $G$  אבליה אזי מסעיף א' נקבל כי  $\text{Im } \phi = H$  אבליה. מצד שני אם  $H$  אבליה אזי נסתכל על  $\phi^{-1}$  ונקבל כי  $\text{Im } \phi^{-1} = G$  אבליה, כדרוש.
- (3) ניעזר בשאלה 2. נניח כי קיים מונומורפיזם, אזי מכיוון ש  $(0, 1) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$  הוא איבר מסדר 6, נקבל כי ב  $S_4$  חייב להיות איבר מסדר 6. אבל, ראינו בתרגול כי האיבר עם הסדר המקסימלי ב-  $S_4$  הוא (1234) שהוא בעל סדר 4. בסתירה.

**שאלה 4.** יהי  $p$  ראשוני. נאמר כי חבורה  $G$  הינה חבורת- $p$  אם הסדר של כל איבר בחבורה הוא חזקה כלשהי של  $p$ . יהי  $\phi: G \rightarrow H$  הומומורפיזם. הוכיחו כי אם  $G$  חבורת- $p$  אזי גם  $\text{Im } \phi$  חבורת- $p$ . הוכיחו או הפריכו את הכיוון השני.

**פתרון.** ניעזר בטענה כי מתקיים  $o(\phi(g)) \mid o(g)$  לכל  $g \in G$ . יהי  $h \in \text{Im } \phi$ , ניקח  $g \in G$  המקיים  $\phi(g) = h$ . מכיוון ש-  $G$  היא חבורת- $p$ , נקבל כי קיים  $n$  טבעי עבורו:  $o(g) = p^n$ . סה"כ נקבל:  $o(\phi(g)) \mid p^n$ ; מכיוון ש  $p$  ראשוני קיים טבעי  $n \leq m$  כך ש-  $o(\phi(g)) = p^m$ . כדרוש.  $o(h) = o(\phi(g)) = p^m$ . לכן  $h$  נמצא ב-  $\mathbb{Z}_p$  (כי  $\mathbb{Z}_p$  היא חבורת- $p$  היחידה). בנוסף המוגדרת לפי:  $\phi(z) = z \pmod p$ . מהגדרת חיבור מודולרי ברור כי הפונקציה הנ"ל הינה הומומורפיזם, בנוסף זהו אפימורפיזם מכיוון שלכל  $\bar{n} \in \mathbb{Z}_p$  מתקיים:  $\phi(n) = n \pmod p = \bar{n}$ . נשים לב כי  $\mathbb{Z}_p$  הינה חבורת- $p$  מכיוון שהסדר של כל איבר הינו  $p$ . עם זאת, ברור כי  $\mathbb{Z}$  אינה חבורת- $p$ , למשל בגלל שהסדר של 1 הינו אינסופי.

**שאלה 5.** עבור כל אחת מן ההעתקות הבאות קבעו ונמקו האם היא: הומומורפיזם, מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם.

- (1)  $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$  המוגדרת לפי  $f(x) = x^3$ .
- (2)  $f: \mathbb{Z}_{10} \rightarrow \mathbb{Z}_5$  המוגדרת לפי:  $f(x) = x \pmod 5$ .
- (3)  $f: S_7 \rightarrow \mathbb{Z}$  המוגדרת לפי:  $f(\sigma) = \sigma(1)$ .

$$f(\sigma) = A : (A)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{else} \end{cases} : \text{לפי } f : S_5 \rightarrow GL_5(\mathbb{R}) \quad (4)$$

$$f_x : G \rightarrow G \text{ המוגדרת לפי: } f_x(g) = xgx^{-1} \text{ כאשר } x \in G \text{ איבר.} \quad (5)$$

$$f(z) = (z \bmod 4, z \bmod 8, z \bmod 2). : \text{לפי } f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2 \quad (6)$$

**פתרון.**

(1) נראה כי  $f$  הנ"ל אינה מוגדרת היטב ולכן בפרט אינה הומומורפיזם; נסתכל על  $-i$  .  $f(i) = i^3 = -i$  אבל,  $-i \notin \text{range}(f)$ , כלומר,  $-i \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^*$ .

(2) זהו אפימורפיזם, נראה זאת. ראשית יש להראות כי  $f$  הנ"ל מוגדרת היטב, כלומר יש להראות חד-ערכיות; יהי  $a, b \leq 10$  טבעיים כך ש- $a \equiv b \pmod{10}$  נרצה להראות כי  $f(a) \equiv f(b) \pmod{5}$  לשם כך נבחין כי:

$$a \equiv b \pmod{10} \Rightarrow 10 \mid a - b \Rightarrow 5 \mid a - b \Rightarrow a \equiv b \pmod{5} \Rightarrow f(a) \equiv f(b) \pmod{5}$$

לכן,  $f$  מוגדרת היטב. כעת נרצה להראות כי  $f$  הינה הומומורפיזם, יהי  $a, b \in \mathbb{Z}_{10}$  נחשב:

$$f(a + b) = a + b \pmod{5} \equiv a \pmod{5} + b \pmod{5} = f(a) + f(b)$$

לכן,  $f$  הומומורפיזם בנוסף. כעת יהי  $[a]_{\sim_5} \in \mathbb{Z}_5$  אזי מתקיים כי עבור  $[a]_{\sim_{10}} \in \mathbb{Z}_{10}$  כי  $f([a]_{\sim_{10}}) = a \pmod{5} = [a]_{\sim_5}$ . סה"כ קיבלנו כי  $f$  אפימורפיזם.

(3) ראשית נעיר כי  $f$  הינה מוגדרת היטב. אבל, זהו לא הומומורפיזם. דרך אחת לראות זאת היא להסתכל על התמונה של הזהות שאינה נשלחת לאיבר היחידה בטווח (0). בנוסף נראה זאת ישירות מההגדרה; ניקח  $(123), (12) \in S_7$  מצד אחד:

$$f((123) \cdot (12)) = f((13)) = 3$$

אבל, מצד שני:

$$f((123)) + f((12)) = 2 + 2 = 4$$

ולכן זהו אינו הומומורפיזם.

(4) נראה כי זהו מונומורפיזם. תחילה נראה כי  $f$  הנ"ל הינה הומומורפיזם, נשים לב כי בעצם עבור  $\sigma \in S_5$  מתקיים  $f(\sigma)$  היא המטריצה האלמנטרית  $E$  המתקבלת על ידי החלפת השורות של מטריצת היחידה בהתאם לתמורה  $\sigma$ , לכן נסמן את פעולת החלפת השורות הנ"ל בתור  $\phi_\sigma$  והמטריצה האלמנטרית המתאימה בתור  $E_\sigma$ . יהי  $\sigma, \tau \in S_5$  אזי מתקיים:

$$f(\sigma\tau) = A : (A)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = \sigma(\tau(j)) \\ 0 & \text{else} \end{cases} = \phi_{\sigma\tau}(I) = \phi_\sigma(E_\tau) = E_\sigma \cdot E_\tau =$$

$$\phi_\sigma(I) \cdot \phi_\tau(I) = f(\sigma)f(\tau)$$

לכן  $f$  היא הומומורפיזם. כעת יהי  $\sigma \neq \tau \in S_5$  נרצה להראות כי  $f(\sigma) \neq f(\tau)$ . יהי  $k_0, k_1 \leq 5$  כך ש- $k_0 \neq k_1$  ומתקיים:  $\sigma(j) = k_0$  וגם  $\tau(j) = k_1$ . אזי:  $(f(\sigma))_{k_0,j} = 1 \neq 0 = (f(\tau))_{k_1,j}$ . כדורש. נראה כי  $f_x$  הינו איזומורפיזם. ראשית נעיר כי מסגירות לכפל והופכי היטב. כעת נראה כי היא הומומורפיזם. יהי  $g, h \in G$  נחשב:

$$f_x(gh) = xghx^{-1} = xgx^{-1}xhx^{-1} = f_x(g) \cdot f_x(h)$$

כעת, נניח כי עבור  $g, h \in G$  מתקיים כי  $f_x(g) = f_x(h)$ . אזי נוכל להסיק כי  $xgx^{-1} = xhx^{-1}$  אבל אם נצמצם משני האגפים נקבל:  $g = h$  ולכן  $f_x$  מונומורפיזם. נשאר להראות כי  $f_x$  על. יהי  $h \in G$  מסגירות לכפל והופכי גם  $x^{-1}hx \in G$ . נחשב את  $h = xx^{-1}hxx^{-1} = f_x(x^{-1}hx)$ . כדורש.

הערה. שימו לב כי אם  $G$  אבלית  $f_x$  הינו בעצם העתקת הזהות!

(6) נראה כי  $f$  הינו הומומורפיזם (משיקולי עוצמות לא ייתכן חד-חד ערכיות). תחילה נשים לב כי הפונקציה מוגדרת היטב. לכן נראה כי זהו הומומורפיזם, לשם כך יהי  $a, b \in \mathbb{Z}$  נחשב:

$$f(ab) = (ab \bmod 4, ab \bmod 8, ab \bmod 2) = (a \bmod 4, a \bmod 8, a \bmod 2) \cdot (b \bmod 4, b \bmod 8, b \bmod 2) = f(a)f(b)$$

סה"כ הראינו כי  $f$  הנ"ל הינה הומומורפיזם.

הערה. נשים לב כי לא ייתכן כי  $f$  היא על מכיוון שלמשל אף מספר שלם לא נשלח על ידי  $f$  לאיבר  $(1, 0, 1)$  בטווח. נניח בשלילה שכן, אזי יהי  $a \in \mathbb{Z}$  כך ש- $f(a) = (1, 0, 1)$ . אז נקבל כי:  $a \equiv 1 \pmod{2}$  וגם  $a \equiv 0 \pmod{4}$  אבל לכל  $a$  שלם אם  $a \equiv 4 \pmod{4}$  אזי בוודאי ש- $a \equiv 2 \pmod{4}$  בסתירה.

**שאלה 6.** תהי  $G$  חבורה. נגדיר  $f: G \rightarrow G$  לפי  $f(g) = g^2$ .

(1) הוכיחו כי  $f$  הוא הומומורפיזם אם ורק אם  $G$  אבלית.

(2) נניח שהחבורה  $G$  אבלית וסופית. הוכיחו כי הנ"ל היא איזומורפיזם אם ורק אם הסדר של  $G$  הוא אי-זוגי.

**פתרון.**

(1)  $\Rightarrow$  נניח כי  $G$  היא אבלית, נבקש להראות כי  $f$  הינו הומומורפיזם. יהי  $g, h \in G$  מהגדרת הפונקציה נקבל כי:  $f(gh) = (gh)^2 = g^2 \cdot h^2$  אבל, מאבלייות נקבל כי  $h^2 \cdot g^2 = (gh)^2$  ולכן סה"כ קיבלנו:

$$f(gh) = g^2 \cdot h^2 = f(g) \cdot f(h)$$

$\Leftarrow$  נניח  $f$  הומומורפיזם. נבקש להראות כי  $G$  אבלית. אבל, מכיוון ש  $f$  הומומורפיזם מתקיים לכל  $g, h \in G$ :

$$(gh)^2 = f(gh) = f(g) \cdot f(h) = g^2 \cdot h^2$$

ראינו בתרגילים קודמים כי אם לכל  $g, h \in G$  מתקיים השוויון:  $(gh)^2 = g^2 h^2$  אזי  $G$  אבלית. לכן סיימנו.

(2)  $\Rightarrow$  נניח כי  $G$  מסדר אי-זוגי ונראה כי הנ"ל הינה איזומורפיזם. משיקולי עוצמות מספיק להוכיח כי היא חד-חד ערכית לכן, יהי  $\ker f \ni g \neq 0$ . אזי  $f(g) = g^2 = e$ . אבל אז נקבל כי 2 מחלק את הסדר של  $G$ . בסתירה לאי-זוגיות הסדר של  $G$ .

$\Leftarrow$  כעת נניח כי  $f$  איזומורפיזם ונרצה להראות כי  $G$  מסדר אי זוגי. ראשית נשים לב כי מכיוון ש  $f$  הינה איזומורפיזם אזי  $\ker f = \{e\}$  כלומר,  $g^2 = e \Leftrightarrow g = e$ . בנוסף נבחין כי אם  $g \neq h \in G$  אזי  $g^2 \neq h^2$  לכן נוכל לחלק את  $G$  בצורה הבאה:

$$G = \{g^2: g \in G \setminus \{e\}\} \cup \{g: g \in G \setminus \{e\}\} \cup \{e\}$$

מההבחנות להעיל ניתן לראות כי זוהי חלוקה של  $G$  לקבוצות זרות אשר שתי הקבוצות הראשונות שוות בעוצמתן. ולכן:

$$|G| = 2 \cdot |\{g: g \in G \setminus \{e\}\}| + 1$$

כדורש.

**שאלה 7.** בכל אחד מהסעיפים הבאים הפרך או תן דוגמא לפונקציה מפורשת:

(1) האם יש אפימורפיזם:

$$f : \mathbb{Z}_{20} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$$

(2) האם יש מונומורפיזם:

$$f : S_3 \rightarrow \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{60}$$

**פתרון.**

(1) מכיוון החבורות סופיות ומאותו גודל אילו היה אפימורפיזם הוא היה איזומורפיזם אבל אין בין שתי החבורות הללו איזומורפיזם מכיוון שאחת ציקלית והשניה לא.

(2) אילו היה מונומורפיזם כנ"ל היינו מקבלים איזומורפיזם בין  $S_7$  ל-  $\text{Im } f$ . אבל,  $\text{Im } f$  אבלית (כתת חבורה של חבורה אבלית) לעומת  $S_7$  אשר איננה אבלית.

**שאלה 8.** (רשות) הראו כי כל חבורה **לא אבלית** מסדר 6 איזומורפית ל-  $S_3$ .