

פיסיקה למתמטיקאים

חבילת גלים בבור פוטנציאל אינסופי

1. פונקציית הגל של חלקיק קוונטי בבור פוטנציאל אינסופי בזמן $t = 0$ היא :

$$\psi(x) = cx(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

(א) מהו קבוע הנירמול c ?

מתנאי הנירמול $1 = \int_0^1 x^2(1-x)^2 dx = c^2 \int_0^1 |\psi|^2 dx$ נקבל $c = \sqrt{30}$.

(ב) מהי ההסתברות למצוא את החלקיק בחצי השמאלי של הבור ($0 \leq x \leq 1/2$) ?

מאחר ו ψ סימטרית ביחס ל $x = 1/2$ גם צפיפות ההסתברות $|\psi|^2$ סימטרית ביחס ל $x = 1/2$ ולכן ההסתברות היר $1/2$.

(ג) מהי ההסתברות למצוא את החלקיק במצב העצמי ה k , ($\phi_k = \sin \pi kx$) ? עבור אילו ערכי k ההסתברות היא 0 ?

$$c_k = \frac{\langle \phi_k | \psi \rangle}{\sqrt{\langle \phi_k | \phi_k \rangle}} = \text{כאשר } |\psi\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k |\phi_k\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \phi_k | \psi \rangle}{\sqrt{\langle \phi_k | \phi_k \rangle}} |\phi_k\rangle$$

$$P_{2k-1} = |c_{2k-1}|^2 = \frac{960}{\pi^6(2k-1)^6}, P_{2k} = \frac{\sqrt{240}}{\pi^3 k^3} (1 - (-1)^k)$$

.0

(ד) מצאו ביטוי לפונקציית הגל כתלות בזמן, $\psi(x, t)$ (ניתן להשאיר בצורת סכום).

כאשר $\psi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-iE_k t/\hbar} \phi_k = \frac{\sqrt{240}}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-iE_k t/\hbar} \frac{\sin \pi kx}{(2k-1)^3}$
 $E_k = \frac{\hbar^2 \pi^2 k^2}{2m}$ האנרגיות של המצבים הקשורים בבור.