מבוא לטופולוגיה – תרגיל 4 (פתרון)

שאלה 1

יהיו X,Y מרחבים מטריים. להוכיח:

א') פונקציה $f\colon X\to Y$ רציפה במידה שווה היא רציפה.

ב') אם X קומפקטי אז פונקציה $f\colon X\to Y$ רציפה היא רציפה במידה שווה.

(רמז: ולהשתמש במוסג "מספר לבג של כיסוי").

פתרון

נתבונן במשפחת תת-קבוצות של X $\{U_y\}_{y\in Y}$ כך ש- $U_y=f^{-1}\left(B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$.

כל U_y פתוחה כי f רציפה ו- $B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ פתוחה. לכל $x\in X$: $f(x)\in B\left(f(x),\frac{\varepsilon}{2}\right)$

ולכן $x\in f^{-1}\left(B\left(f(x),\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$. זאת אומרת ש- $\{U_y\}_{y\in Y}$ כיסוי פתוח של X.

מכיוון ש-X קומפקטי לכיסוי הזה יש מספר לבג $\delta>0$ (ההרצאות). יהיו $x_1,x_2\in X$ כך ש- $d_X(x_1,x_2)<\delta$. אזי $x_2\in B(x_1,\delta)$. לפי הגדרתו של מספר לבג קיימת נקודה $y\in Y$ כך ש- $B(x_1,\delta)\subseteq f^{-1}\left(B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$ ולכן $f(B(x_1,\delta))\subseteq B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

מזה מקבלים לפי אחשוויון המשולש: $f(x_1),f(x_2)\in B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)$

ו- $d_Y(f(x_1),f(x_2))\le d_Y(f(x_1),y))+d_Y(y,f(x_2))<\varepsilon$, מצ"ל.

שאלה 2

תהי X קבוצה ו-τ קבוצה של תת-קבוצות של X . במקרים א) - ד) (כאן למטא):

1) תוכיחו או תפריכו ש-τ – טופולוגיה על X.

2) במידה ו-τ – טופולוגיה תמצאו את כל התת-קבוצות הסגורות

3) במידה ו-τ – טופולוגיה תוכיחו או תפריכו שהמרחב הטופולוגי (X,τ) מטריזבילי.

א) $X=\{a,b\}$ $\tau=\{\emptyset,X,\{a\}\}$

פתרון

1) $\emptyset,X\in\tau$.

$X\cup\{a\}=X\in\tau$, $\emptyset\cup X\cup\{a\}=X\in\tau$,$\emptyset\cup\{a\}=\{a\}\in\tau$,$\emptyset\cup X=X\in\tau$.

$\tau \ni \{a\} = \{a\} \cap X$, $\tau \ni \emptyset = \{a\} \cap \emptyset$, $\tau \ni \emptyset = X \cap \emptyset$. לכן τ - טופולוגיה לפי ההגדרה.

2) התת-קבוצות הסגורות: $\emptyset, X, \{b\}$.

3) (X,τ) אינו מטריזבילי: נניח – <u>בשלילה</u> – שכן, אזי הכדור $B(b,\frac{1}{2})$ אבל הוא שווה לנקודון $\{b\}$ שאינו פתוח. <u>סתירה.</u>

<u>ב)</u> $X = \{a,b,c\}$ $\tau = \{\emptyset, X, \{a,c\}, \{b,c\}, \{c\}\}$

<u>פתרון</u>

1) $\emptyset, X \in \tau$.

<u>אחוד:</u> $\emptyset$ לא משפיעה לאף אחוד, לכן מותר לא להוסיף אותה לאחודים. כל אחוד עם X שווה X ולכן פתוח. נשארו האחודים:

$\{a,c\} \cup \{b,c\} \cup \{c\} = X \in \tau$

$\{a,c\} \cup \{b,c\} = X \in \tau$

$\{a,c\} \cup \{c\} = \{a,c\} \in \tau$

$\{b,c\} \cup \{c\} = \{b,c\} \in \tau$

<u>חתוך:</u> X לא משפיעה לאף חתוך, לכן מותר לא להוסיף אותה לחתוכים. כל חתוך עם $\emptyset$ שווה $\emptyset$ ולכן פתוח. נשארו החתוכים:

$\{a,c\} \cap \{b,c\} \cap \{c\} = \{c\} \in \tau$

$\{a,c\} \cap \{b,c\} = \{c\} \in \tau$

$\{a,c\} \cap \{c\} = \{c\} \in \tau$

$\{b,c\} \cap \{c\} = \{c\} \in \tau$

τ - טופולוגיה לפי ההגדרה.

2) תת-קבוצות הסגורות: $\emptyset, X$, $\{a,b\}$, $\{a\}$, $\{b\}$.

3) (X,τ) אינו מטריזבילי: נניח – <u>בשלילה</u> – שכן, אזי הכדור $B(b,\frac{d(a,b)}{2})$ אבל הוא שווה לנקודון $\{b\}$ שאינו פתוח. <u>סתירה.</u>

<u>ג)</u> $X = \{a,b,c\}$ $\tau = \{\emptyset, X, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b\}\}$

<u>פתרון.</u> τ אינה טופולוגיה: $\{a,c\} \cap \{b,c\} = \{c\} \notin \tau$.

<u>ד)</u> תהי X קבוצה המכילה יותר מ-2 איברים.

יהיו: $p \in X$, $Y = X - \{p\}$, σ – טופולוגיה כלשהי <u>על הקבוצה Y</u> .

תהי $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \cup \{p\} \mid U \in \sigma\}$

פתרון.

1) $\emptyset \in \tau$, $\tau \ni X = Y \cup \{p\}$.

אחוד. יהיו $V_\alpha \in \tau$. אם באחוד $\cup_\alpha V_\alpha$ כל ה-V_α ריקות אז גם החוד ריק ושייך ל-τ. אם לפחות אחת מהקבוצות V_α אינה ריקה, נסיר מהאחוד את כל הקבוצות הריקות נקבל:

$\cup_\alpha V_\alpha = \cup_\alpha (U_\alpha \cup \{p\}) = (\cup_\alpha U_\alpha) \cup \{p\}$,

כאשר $U_\alpha \in \sigma$ לכל α. מכיוון ש- σ טופולוגיה על Y אז גם $(\cup_\alpha U_\alpha) \in \sigma$. לכן $\cup_\alpha V_\alpha \in \tau$.

חיתוך יהי $n \in \mathbb{N}$ ו-$V_1, \dots, V_n \in \tau$. אם אחת מהקבוצות האלה ריקה אז גם חיתוכן ריק ושייך ל- τ. אחרת:

$V_1 \cap \dots \cap V_n = (U_1 \cup \{p\}) \cap \dots \cap (U_n \cup \{p\}) = (U_1 \cap \dots \cap U_n) \cup \{p\}$.

כיוון ש-σ טופולוגיה על Y אז גם $(U_1 \cap \dots \cap U_n) \in \sigma$

ולכן $V_1 \cap \dots \cap V_n \in \tau$. לפי ההגדרה הוחכנו ש-$\tau$ טופולוגיה.

2) הקבוצות הסגורות ב-(X,τ) הן : $X, \emptyset$ וכל הקבוצות של סוג:

$X - (U \cup \{p\}) = (X - \{p\}) - U) = Y - U$ כאשר U פתוחה ב-(Y,σ).

ז"א, הקבוצות $Y - U$ סגורות ב-(Y,σ). קיבלנו סופית שסגורתת ב-(X,τ) הן:

X והקבוצות הסגורות ב-(Y,σ).

3) (X,τ) אינו מטריזבילי: נניח – בשלילה – שכן, אזי לפי הגדרת X קיימת נקודה $q \neq p$. נתבונן בכדור $B(q, \frac{d(p,q)}{2})$. הכדור לא ריק ואינו מכיל נקודת p ולכן לא יכול להיות פתוח ב-(X,τ). שסותר לפמחחות של הכדור.

שאלה 3 (מההרצאה האחרונה)

יהי X מרחב טופולוגי. יהיו A, B תת-מרכבים של X כך ש- $A \subseteq B \subseteq X$. להוכיח שלהשרות טופולוגיה ישירות מ-X ל-A או קודם להשרות טופולוגיה מ-X ל-B ולאחר מכן מ-B ל-A - זה אותו דבר.

הוכחה

נשתמש כאן בסימונים הבאים: אם S, T שני מרחבים טופולוגיים ו-$S \subseteq T$, נסמן את הטופולוגיה של T ב-τ_T. ואת הטופולוגיה המושרת מ-T ל- S ב-τ_{S_T}.

אז לפי הסימון הזה צריך להוכיח ש- $\tau_{A_{B_X}} = \tau_{A_X}$. לפי הגדרת הטופולוגיה המושרת (ההרצה):

$\boldsymbol{\tau_{A_{B_X}} \subseteq \tau_{A_X}}$.

$$U \in \tau_{A_{B_X}} \Rightarrow \exists V \in \tau_{B_X}: U = A \cap V$$

$$V \in \tau_{B_X} \Rightarrow \exists W \in \tau_X : V = B \cap W$$
$$U = A \cap B \cap W = A \cap W \Rightarrow U \in \tau_{A_X}$$

$\boldsymbol{\tau_{A_{B_X}} \supseteq \tau_{A_X}}$.

$$U \in \tau_{A_X} \Rightarrow \exists W \in \tau_X : U = A \cap W = (A \cap B) \cap W = A \cap (B \cap W)$$
$$B \cap W \in \tau_{B_X} \Rightarrow U = A \cap (B \cap W) \in \tau_{A_{B_X}}$$

שאלה 4 (מההרצאה האחרונה)

יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים ו- f פונקציה: $f: X \to Y$.

להוכיח: f פונקציה רציפה אם ורק אם היא רציפה בכל נקודה $p \in X$.

הוכחה

$\Leftarrow$. תהי f רציפה, $p \in X$ ו- $V \subseteq Y$ - סביבה פתוחה של $f(p)$. לפי הגדרתה של פונקציה רציפה: $U = f^{-1}(V)$ - קבוצה פתוחה. ברור גם ש- $p \in U$.

וסופית: $f(U) = f\left(f^{-1}(V)\right) = V$. לכן f רציפה בנקודה p.

$\Rightarrow$. תהי f רציפה בכל נקודה של X ותהי $B \subseteq Y$ פתוחה. נוכיח ש- $A = f^{-1}(B)$ פתוחה ב-X. לפי הנחה לכל $a \in A$ קיימת סביבה פתוחה U_a של a כך ש- $f(U_a) \subseteq B$. מזה נובע (לפי הגדרה של A) $U_a \subseteq A$. לפי הלמה השימושית (ההרצאות) $A = \cup_{a \in A} U_a$.
לכן A פתוחה כאיחוד קבוצות פתוחות ואז f רציפה.

שאלה 5

תהי $\mathbb{N}$ קבוצת מספרים טבעיים .

תהי $\tau = \{[n, \infty) \subseteq \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$

א) תוכיחו ש-τ טופולוגיה על $\mathbb{N}$

הוכחה

1) $\emptyset \in \tau$, $\mathbb{N} = [1, \infty) \in \tau$
2) אחוד. $\cup_{\alpha \in I} [n_\alpha, \infty) = [\min_{\alpha \in I}\{n_\alpha\}, \infty) \in \tau$. (*)

אם נוסיף $\mathbb{N}$ לאחוד (*) לפחות פעם אחת, אז כל האחוד יהיה שווה ל-$\mathbb{N}$ ושייך

ל- τ . אם נוסיף תת-קבוצות ריקות לאחרד (*) אז התוצאה לא תשתנה. אם כל
איברי האחוד יהיו ריקות, אז גם האחוד עצמו יהיה ריק ושייך ל-τ .

3) חיתוך. $[n_1,\infty) \cap \ldots \cap [n_k,\infty) = [\max\{n_1,\ldots,n_k\},\infty) \in \tau$. (**)

אם נוסיף $\emptyset$ לחיתוך (**) לפחות פעם אחת, אז כל החיתוך יהיה שווה ל-$\emptyset$ ושייך
ל- τ . אם נוסיף קבוצות שוות ל- $\mathbb{N}$ לחיתוך (**) אז התוצאה לא תשתנה. אם כל
איברי החיתוך יהיו $\mathbb{N}$, אז גם החיתוך עצמו יהיה שווה ל- $\mathbb{N}$ ושייך ל-τ .

ב) יהי K מרחב טופולוגי סופי ותהי $f: K \to \mathbb{N}$ פונקציה.
תוכיחו או תפריכו ש-f פונקציה פתוחה.

פתרון.
אם $K = \emptyset$ (מקרה מנוון!) אז אפשר להגיד שהפונקציה פתוחה.
אם $K \neq \emptyset$ אז $f(K) \neq \emptyset$ וזאת קבוצה סופית. אבל בטופולוגיה τ (הסעיף הקודם)
כל הקבוצות פתוחות ולא ריקות הן אינן סופיות. לכן $f(K)$ לא פתוחה ו-K פתוחה.
אזי f פונקציה לא פתוחה.