נכתב על ידי יהונתן רגב

# משפט הפונקציה ההפוכה

**משפט (הפונקציה ההפוכה)**

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

תהי $f: E \to \mathbb{R}^n$.

נניח כי: $f \in C^1(E)$.

תהי $a \in E$ כך ש:

$$\mathrm{J}f(a) \quad \neq \quad 0$$

אזי, קיימת סביבה $U \subseteq E$ של $a$ כך ש - $f$ חד-חד-ערכית על $U$, התמונה $V = f(U)$ פתוחה והפונקציה ההפוכה $f^{-1}: V \to U$ שייכת ל - $C^1(V)$.

**הוכחה**

נסמן:

$$A \quad \coloneqq \quad f'(a)$$

$\mathrm{J}f(a) \neq 0$, לכן:

$$\det A \quad \neq \quad 0$$

לכן, $A$ הפיכה.

$f \in C^1(E)$, לכן:

$$\mathrm{J}f(x) \quad \in \quad C(E)$$

לכן, קיימת סביבה $U_0$ של $a$ כך שלכל $x \in U_0$ מתקיים:

$$\mathrm{J}f(x) \quad \neq \quad 0$$

נוכיח כי קיימת סביבה $U$ של $a$ וקיים $0 < \lambda$ כך שלכל $x_1, x_2 \in U$, מתקיים:

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \quad \geq \quad \lambda \cdot \|x_1 - x_2\|$$

לכל $h \in \mathbb{R}^n$, מתקיים:

$$\begin{aligned}\|h\| &= \left\|A^{-1}\left(A(h)\right)\right\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \cdot \|A(h)\|\end{aligned}$$

לכן, עבור:

$$h := x_1 - x_2$$

מתקיים:

$$\|A(x_1) - A(x_2)\| \geq \frac{\|x_2 - x_2\|}{\|A^{-1}\|}$$

נגדיר:

$$\varphi(x) := f(x) - A(x)$$

מתקיים:

$$\begin{aligned}\varphi'(a) &= f'(a) - A \\ &= 0\end{aligned}$$

לכן, לכל $1 \leq i, j \leq n$:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a) = 0$$

$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ רציפה, לכן, לכל $0 < \varepsilon$, קיים $0 < \delta_\varepsilon$, כך שלכל $x \in B(a, \delta_\varepsilon)$, מתקיים:

$$\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)\right| < \varepsilon$$

עפ"י משפט לגרנז', לכל $x_1, x_2 \in B(a, \delta_\varepsilon)$, מתקיים:

$$\begin{aligned}|\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| &= \|\langle \text{grad } \varphi_i(\xi), x_1 - x_2\rangle\| \\ &\leq \|\text{grad } \varphi_i(\xi)\| \cdot \|x_1 - x_2\| \\ &< \sqrt{n} \cdot \varepsilon \cdot \|x_1 - x_2\|\end{aligned}$$

לכן:

$$\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \leq n \cdot \varepsilon \cdot \|x_1 - x_2\|$$

לכן, לכל $x_1, x_2 \in B(a, \delta_\varepsilon)$, מתקיים:

$$\begin{aligned}\|f(x_1) - f(x_2)\| &= \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2) + A(x_1) - A(x_2)\| \\ &\geq \|A(x_1) - A(x_2)\| - \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \\ &\geq \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \varepsilon \cdot n\right) \cdot \|x_1 - x_2\|\end{aligned}$$

נבחר:

$$\varepsilon := \frac{1}{2\pi \cdot \|A^{-1}\|}$$

נגדיר:

$$\lambda := \frac{1}{2\|A^{-1}\|}$$

נגדיר:

$$U := B(a, \min(r, \delta_\varepsilon))$$

כאשר $r$ רדיוס הסביבה $U_0$.

לכן, לכל $x_1, x_2 \in U$, מתקיים:

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \geq \lambda \cdot \|x_1 - x_2\|$$

לכן, $f$ חד-חד-ערכית על $U$.

נוכיח כי $V = f(U)$ פתוחה.

יהי $y_0 \in V$.

לכן, קיים $x_0 \in U$ כך ש:

$$y_0 = f(x_0)$$

$U$ פתוחה, לכן קיים $0 < r$ כך ש:

$$B(x_0, r) \subseteq U$$

נגדיר:

$$\rho \quad := \quad \frac{\lambda r}{2}$$

נוכיח כי:

$$B(y_0, \rho) \quad \subseteq \quad V$$

יהי $y' \in B(y_0, \rho)$.

לכן:

$$\|y' - y_0\| \quad < \quad \rho$$

נוכיח כי קיים $x' \in U$ כך ש:

$$y' \quad = \quad f(x')$$

נגדיר:

$$\psi(x) \quad := \quad \|y' - f(x)\|^2$$

על הקבוצה הקומפקטית:

$$\overline{B(x_0 r)}$$

עפ"י משפט ויירשטרס, $\psi$ מקבלת מינימום בנקודה פנימית של $\overline{B(x_0 r)}$.

מתקיים:

$$\begin{aligned} |\psi(x_0)| \quad &= \quad \|y' - f(x_0)\|^2 \\ &< \quad \rho \end{aligned}$$

עבור $\|x - x_0\| = r$, מתקיים:

$$\begin{aligned} \|y' - f(x)\| \quad &\geq \quad \|y_0 - f(x)\| - \|y' - y_0\| \\ &\geq \quad \lambda\|x_0 - x\| - \rho \\ &\geq \quad \lambda r - \rho \\ &\geq \quad \rho \end{aligned}$$

נניח כי $\psi$ מקבלת מינימום ב - $x' \in B(x_0, r)$.

עפ"י משפט:

$$\mathrm{d}\,\psi(x') \quad = \quad 0$$

לכן, לכל $1 \le j \le n$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_j}(x') \quad = \quad 0$$

מתקיים:

$$\psi(x) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n}\big(y_i - f_i(x)\big)^2$$

לכן, לכל $1 \le j \le n$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_j}(x') \quad = \quad -2\cdot\sum_{i=1}^{n}\big(y_i' - f_i(x')\big)\cdot\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x') \quad = \quad 0$$

מתקיים:

$$\mathrm{J}f(x') \quad \neq \quad 0$$

לכן, לכל $1 \le i \le n$:

$$y_i' - f_i(x') \quad = \quad 0$$

לכן:

$$y' \quad = \quad f(x')$$

לכן, $V = f(U)$ פתוחה.

נוכיח כי:

$$f^{-1} \quad \in \quad \mathcal{C}^1(V)$$

יהי $y_0 \in V$.

לכן, קיים $x_0 \in U$ כך ש:

$$f(x_0) \quad = \quad y_0$$

$f$ דיפרנציאבילית, לכן:

$$f(x_0+h) - f(x_0) \quad = \quad \mathcal{L}(h) + r(h)$$

כאשר:

$$\mathcal{L} \quad = \quad f'(x_0)$$

ומתקיים:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \quad = \quad 0$$

נבחר:

$$h \quad = \quad h(\eta) \quad = \quad f^{-1}(y_0+\eta)-f^{-1}(y_0)$$

לכן, מתקיים:

$$\overbrace{f(x_0+h)}^{y_0+\eta}-\overbrace{f(x_0)}^{y_0} \quad = \quad \eta$$

לכן:

$$\|\eta\| \quad \geq \quad \lambda\cdot\|h(\eta)\|$$

מתקיים:

$$\eta \quad = \quad \mathcal{L}\big(h(\eta)\big)+r\big(h(\eta)\big)$$

$f'(x_0)\neq 0$, לכן $\mathcal{L}$ הפיכה.

לכן:

$$f^{-1}(y_0+\eta)-f^{-1}(y_0) \quad = \quad \mathcal{L}^{-1}(\eta)+\rho(\eta)$$

כאשר:

$$\rho(\eta) \quad = \quad -\mathcal{L}^{-1}\Big(r\big(h(\eta)\big)\Big)$$

נוכיח כי:

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{\|\rho(\eta)\|}{\|\eta\|} \quad = \quad 0$$

מתקיים:

$$\|\rho(h)\| \quad = \quad \Big\|\mathcal{L}^{-1}\Big(r\big(h(\eta)\big)\Big)\Big\|$$

$$\|\rho(h)\| \quad \leq \quad \|\mathcal{L}^{-1}\| \cdot \left\|r\big(h(\eta)\big)\right\|$$

לכן:

$$\begin{aligned} \frac{\|\rho(h)\|}{\|\eta\|} \quad &\leq \quad \|\mathcal{L}^{-1}\| \cdot \frac{\left\|r\big(h(\eta)\big)\right\|}{\|\eta\|} \\ &\leq \quad \frac{\|\mathcal{L}^{-1}\|}{\lambda} \cdot \frac{\left\|r\big(h(\eta)\big)\right\|}{\|h(\eta)\|} \end{aligned}$$

אם $\eta \to 0$, $h(\eta) \to 0$, לכן:

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{\|\rho(\eta)\|}{\|\eta\|} \quad = \quad 0$$

לכן, $f^{-1}$ דיפרנציאבילית ב - $y_0$.

לכן, $f^{-1}$ דיפרנציאבילית ב - $V$.

לכן:

$$(f^{-1})'(y) \quad = \quad \big(f'(x)\big)^{-1}$$

כאשר:

$$x \quad = \quad f^{-1}(y)$$

עפ"י הגדרת המטריצה $\big(f'(x)\big)^{-1}$, כאשר $x = f^{-1}(y)$, המקדמים של ההעתקה $(f^{-1})'(y)$ הן פונקציות רציפות ב – $V$.

לכן:

$$f^{-1} \quad \in \quad \mathcal{C}^1(V)$$

■

**הערה**

מתקיים:

$$(f^{-1})'(y) \quad = \quad \big(f'(x)\big)^{-1}$$

לכן:

$$Jf^{-1}(y) = \frac{1}{Jf(x)}$$

כאשר:

$$x = f^{-1}(y)$$

■

**דוגמה**

הדרישה שהיעקוביאן לא יתאפס הכרחית.

נגדיר:

$$f(x) := x^3$$

מתקיים:

$$f'(0) = 0$$

$f^{-1}$ קיימת, מתקיים:

$$f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}}$$

אולם, $f^{-1}$ אינה דיפרנציאבילית ב - 0.

■

**הערה**

באופן כללי, אם $Jf(a) = 0$, אז $f^{-1}$ אינה דיפרנציאבילית ב - $f(a)$.

נניח בשלילה כי $f^{-1}$ דיפרנציאבילית ב - $f(a)$.

מתקיים:

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x$$

עפ"י כלל השרשרת (גרסת המטריצות):

$$(f^{-1})'(y) \cdot f'(x) = \mathrm{I}$$

כאשר:

$$y = f(x)$$

לכן:

$$\mathrm{J}f^{-1}\big(f(a)\big) \cdot \mathrm{J}f(a) = 1$$

לכן:

$$\mathrm{J}f(a) \neq 0$$

סתירה.

לכן, $f^{-1}$ אינה דיפרנציאבילית ב - $f(a)$.

■