

תרגיל 2 בפונקציות מרוכבות

1. פתרו את המשוואות הבאות וציירו ב $\mathbb{C}$ את הקבוצה המתקבלת.

$$|z|^2 + 2iz + 2i\bar{z} + 3 = 0 \quad (\text{א})$$

$$|z|^2 + 2iz - 2i\bar{z} + 3 = 0 \quad (\text{ב})$$

$$2. \text{ נביט על הפולינום } P(z) = z^{12} + 3z^8 + 101z^4 + 1$$

(א) הוכיחו כי לפולינום יש שורש על או בתוך מעגל היחידה - כלומר קיים שורש z המקיים $|z| \leq 1$.

(ב) חיזוק לסעיף הקודם: הוכיחו כי לפולינום יש שורש בתוך מעגל היחידה - שורש המקיים $|z| < 1$.

הדרכה/רמז: קחו את z מהסעיף הקודם והניחו כי בשלילה כי $|z| = 1$. הגיעו לסתירה על ידי אי שוויון המשולש והגורם ה"דומיננטי" $101z^4$.

(ג) הוכיחו כי לפולינום יש עוד שורש בתוך מעגל היחידה (רמז: הראו כי אין לפולינום שורשים ממשיים).

3. מספר z נקרא שורש יחידה מסדר n אם הוא מקיים $z^n = 1$. חשבו את מכפלת כל שורשי היחידה מסדר n (התשובה מן הסתם יכולה להיות תלויה ב n).

4. האם הגבולות של הסדרות הבאות קיימים? נמקו. אם כן, חשבו אותם. (הכוונה לגבול מספרי בלבד, אין צורך להתייחס לאפשרות של גבול באינסוף)

$$z_n = \frac{1+n}{1-2n} + \frac{n-10}{n^2}i \quad (\text{א})$$

$$z_n = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + n \sin \frac{1}{n}i \quad (\text{ב})$$

$$z_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-n} + \sqrt[n]{3^n + 4^n}i \quad (\text{ג})$$

$$z_n = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n \quad (\text{ד})$$