

מד"ר למתמטיקאים

תרגיל 2

1. מצאו פתרון כללי למד"ר הבאות:

$$t^2 y'' = y'^2, \quad t > 0 \quad (\text{א})$$

פתרון: זוהי מד"ר מהצורה $y'' = f(y', t)$. נציב $y = p'$ ונקבל את המשוואה $p' = p^2/t^2$ שניתנת לאינטגרציה ע"י הפרדת משתנים. לאחר אינטגרציה נקבל $dy = dt/(1 + c_1 t)$. מאינטגרציה נוספת נקבל פתרון רגולרי $yc_1^2 = 1 + c_1 t - \ln|1 + c_1 t| + c_2$, $c_1 \neq 0$ ו $y = c$ ו $y = \frac{1}{2}t^2 + c_2$, $c_1 = 0$

$$yy'' - y'^3 = 0 \quad (\text{ב})$$

פתרון: זוהי משוואה מהצורה $y'' = f(y', y)$. נציב $y' = p$, $y'' = p dp/dy$ ונקבל $dp/p = dy/y$. מאינטגרציה על משוואה זו נקבל $-dt = (\ln|y| + c_1)dy$ ומאינטגרציה נוספת נקבל $y \ln|y| - y + c_1 t + t = c_2$ ופתרון סינגולרי $y = c$

$$y_1 = \sin(t^2) \quad \text{כי } ty'' - y' + 4t^3 y = 0, \quad t > 0 \quad (\text{ג})$$

פתרון: נציב בנוסחה $y_2 = y_1 \int dt e^{-\int p dt} / y_1^2$ ונקבל $y_2 = -\frac{1}{2} \cos(t^2)$. לכן הפתרון הכללי הוא $y = c_1 \sin(t^2) + c_2 \cos(t^2)$

$$(1 + t^2)y'' + 2ty' + 3/t^2 = 0 \quad (\text{ד})$$

פתרון: גם כאן המשוואה מהצורה $y'' = f(y', t)$ ולאחר ההצבה $y' = p$ נקבל את המד"ר הלא הומוגנית עבור p $p' + 2t/(1 + t^2)p = -3/t^2(1 + t^2)$. לאחר אינטגרציה כפולה נקבל $y = c_1 \arctan t + 3 \ln|t| - \frac{3}{2} \ln(1 + t^2) + c_2$

$$t^2 y'' + ty' + y = 0 \quad t \neq 0 \quad (\text{ה}) \quad (\text{משוואת אוילר})$$

פתרון: נציב $x = \ln|t|$ ונקבל את המשוואה $d^2y/dx^2 + y = 0$ עם פתרונות יסודיים $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$ ולכן פתרון משוואת אוילר הוא $y = c_1 \sin \ln|t| + c_2 \cos \ln|t|$

2. משוואה מהצורה

$$(1) \quad P(x)y'' + Q(x)y' + R(x) = 0$$

נקראת מדויקת אם היא ניתנת לכתיבה כ

$$(2) \quad (P(x)y')' + (f(x)y)' = 0$$

כאשר $f(x)$ תלויה בפונקציות $P(x), Q(x)$ ו $R(x)$. מאינטגרציה של המד"ר מסדר ראשון $P'y' + fy = c_1$ המתקבלת ממשוואה (2) מתקבל פתרון למשוואה (1). ניתן להראות כי תנאי הכרחי ומספיק לכך שמשוואה (1) מדויקת הוא $P''(x) - Q'(x) + R(x) = 0$. אם משוואה (1) אינה מדויקת ניתן להפוך אותה לכזו ע"י הכפלה בגורם אינטגרציה $\mu(x)$. אזי ניתן לרשום

$$(3) \quad (\mu(x)P(x)y')' + (f(x)y)' = 0,$$

כאשר $\mu(x)$ מקיימת את המשוואה הצמודה (adjoint equation)

$$(4) \quad P\mu'' + (2P' - Q)\mu' + (P'' - Q' + R)\mu = 0.$$

בדקו האם המשוואה $y'' + \frac{4x}{2x-1}y' + \frac{8x-8}{(2x-1)^2}y = 0$ מדויקת. אם לא, פתרו אותה ע"י מציאת גורם אינטגרציה מפתרון המשוואה הצמודה המתאימה ואינטגרציה של המד"ר $\mu P'y' + fy = c_1$.

פתרון: נסמן $P = 1$, $Q = 4x/(2x-1)$, $R = (8x-8)/(2x-1)^2$ $P'' - Q' + R = 4/(2x-1) \neq 0$ ולכן המשוואה אינה מדויקת. מהצבה בנוסחת המשוואה הצמודה נקבל $\mu'' - 4x/(2x-1)\mu' + 4/(2x-1)\mu = 0$. קל לראות כי $\mu = x$ פתרון של המשוואה הצמודה. נקבל אפוא את המד"ר $xy' + (4x^2/(2x-1) - 1)y = c_1$ המשוואה המקורית $y = c_1/(2x-1) + c_2xe^{-2x}/(2x-1)$.

3. פתרו את בעיות ההתחלה הבאות:

$$(א) \quad 6y'' - 5y' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0$$

פתרון: $y = -8e^{t/2} + 12e^{t/3}$

$$(ב) \quad y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

פתרון: $y = e^{-2t} \cos t + 2e^{-2t} \sin t$

$$(ג) \quad y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

פתרון: $y = te^{-t}$

$$(ד) \quad 4y''' + y' + 5y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -1$$

פתרון: $y = \frac{2}{13}e^{-t} + \frac{24}{13}e^{t/2} \cos t + \frac{3}{13}e^{t/2} \sin t$

$$(ה) \quad y^{(4)} + 6y''' + 17y'' + 22y' + 14y = 0,$$

$y(0) = 1, \quad y'(0) = -2, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 3$

פתרון: $y = \frac{21}{13}e^{-t} \cos t - \frac{38}{13}e^{-t} \sin t - \frac{8}{13}e^{-2t} \cos \sqrt{3}t + \frac{17\sqrt{3}}{39}e^{-2t} \sin \sqrt{3}t$

4. מצאו פתרון כללי למד"ר הבאות:

(א) $0 < \lambda \neq m\pi, m = 1, 2, \dots, N, y'' + \lambda^2 y = \sum_{m=1}^N a_m \sin m\pi t$ פתרון: ננסה פתרון פרטי מהצורה $y_p = \sum_{m=1}^n b_m \sin m\pi t$ לאחר הצבה נקבל $b_m = a_m / (\lambda^2 - m^2 \pi^2)$ ולכן הפתרון הכללי הוא $y = c_1 \sin \lambda t + c_2 \cos \lambda t + \sum_{m=1}^n \frac{a_m}{\lambda^2 - m^2 \pi^2} \sin m\pi t$

$$y''' - y'' - y' + y = 2e^{-t} + 3 \quad (\text{ב})$$

פתרון: נציב פתרון פרטי מהצורה $y_p = Ate^{-t} + B$ ונקבל

$$y = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t} + \frac{1}{2} t e^{-t} + 3$$

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 3 + \cos 2t \quad (\text{ג})$$

פתרון: נציב פתרון פרטי מהצורה $y_p = A + B \cos 2t$ ונקבל

$$y = c_1 \sin t + c_2 \cos t + c_3 t \sin t + c_4 t \cos t + 3 + \frac{1}{9} \cos 2t$$

$$y''' + y' = \tan t, \quad 0 < t < \pi/2 \quad (\text{ד})$$

פתרון: ע"י שמוש בנוסחה $y = \sum c_i y_i + \sum y_i \int dt g(t) W_i / W$ כאשר W הורונסקיאן ו

$$W_i = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & 0 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & 0 & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & 1 & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

כאשר בעמודה ה i נמצא הוקטור $(0, 0, \dots, 1)^T$, נקבל

$$y = c_1 + c_2 \sin t + c_3 \cos t + \int (\tan t (-1) / (-1) dt + \sin t \int (\tan t \sin t / (-1) dt + \cos t \int (\tan t \cos t / (-1) dt =$$

$$c_1 + c_2 \sin t + c_3 \cos t - \ln \cos t - \sin t \ln(\sec t + \tan t)$$

$$y''' - y' = \csc t, \quad 0 < t < \pi \quad (\text{ה})$$

פתרון: בדומה לפתרון סעיף 4 נקבל

$$y = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t} + \int \csc t 2/2 dt + e^t \int \csc t e^{-t} / 2 dt + e^{-t} \int \csc t e^t / 2 = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t} - \ln \sin t + \ln(\cos t + 1) + \frac{1}{2} e^t \int e^{-t} / \sin t dt + \frac{1}{2} e^{-t} \int e^t / \sin t dt$$

5. הוכיחו כי אם $\phi(x)$ פתרון לא טריויאלי של המד"ר

$$(5) \quad y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,$$

כאשר $p_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ רציפות בקטע (a, b) ,

אזי לפונקציות $\phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \dots, \phi^{(n-1)}(x)$ אין אף שורש משותף ב (a, b) .

רמז: $\phi(x) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(x)$ כסכום פתרונות יסודיים של המד"ר.

$y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$

פתרון: מאחר ו $p_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ רציפות בקטע (a, b) , $\phi(x)$ פתרון לבעית ההתחלה משוואה (5) עם תנאי ההתחלה
 $\phi(x_0) = \phi_0, \phi'(x_0) = \phi'_0, \dots, \phi^{(n-1)}(x_0) = \phi_0^{(n-1)}$ לכל נקודה $x_0 \in (a, b)$.
 נניח כעת בשלילה לטענה כי קיימת נקודה $\xi_0 \in (a, b)$ כך ש
 $\phi^{(j)}(\xi_0) = \sum_{i=1}^n c_i y_i^{(j)}(\xi_0) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ אזי ניתן לרשום

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdot & \cdot & \cdot & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdot & \cdot & \cdot & y'_n \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdot & \cdot & \cdot & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}.$$

אבל הדטרמיננטה של מטריצת המקדמים היא הורונסיקאן
 $W(y_1, y_2, \dots, y_n, \xi_0) \neq 0$ ולכן $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ כלומר $\phi \equiv 0$ וקיבלנו סתירה.

6. הוכיחו כי בהינתן פיתרון $y_1(x)$ של המד"ר $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ אזי פתרון זה והפיתרון השני המתקבל ע"י ההצבה $y_2 = v(x)y_1(x)$ בלתי תלויים לינארית.

פתרון: תהי $v(x) = \int dx e^{-\int p dx} / y_1^2$ שונה מאפס. אזי

$$W(y_1, y_2, x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \int dx \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} \\ y'_1 & y'_1 \int dx \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} + \frac{e^{-\int p dx}}{y_1} \end{vmatrix} = e^{-\int p dx} \neq 0$$

ולכן y_1, y_2 בת"ל.