

מד"ר למתמטיקאים – תרגיל 3

1.א. מצאו בשיטת קירובי Picard את ארבעת הקירובים הראשונים למד"ר:

$$y' = x - y, y(0) = 0.$$

ב. נחשו צורתו הכללית של הקירוב $y_n(x)$ והוכיחו השערתכם באינדוקציה.

ג. חשבו את הפיתרון המדויק y והוכיחו כי $y_n \rightarrow y$ במידה שווה על כל הישר הממשי.

ד. עבור המלבן $D = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ - העריכו את השגיאה בחישוב $y(\frac{1}{2})$ על ידי הקירוב מסדר n .

פיתרון:

$$y_0 = 0, y_1 = \frac{x^2}{2}, y_2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3}, y_3 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

מכאן ניחוש של פיתרון: $y_n(x) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$ ואינדוקציה.

הפיתרון המדויק למד"ר: $y = e^{-x} + x - 1$ וההתכנסות במידה שווה על קטעים קומפקטיים על הישר וקיים $|y(0.5) - y_n(0.5)| \leq 2^{1-n}$

2. משוואות אוילר (מסדר שני) היא משוואה מהצורה:

$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0, x > 0$ כאשר β, α ממשיים. שינוי המשתנה $t = \ln x$ מעבירה את משוואת אוילר למשוואה במקדמים קבועים.

א. בעזרת הצבה זו פתרו את: $x^2 y'' + x y' + y = 0, x > 0$.

ב. ראינו כי אם מחפשים פיתרון למשוואות אוילר שצורתו x^r מקבלים משוואה

$F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta$ שאת שורשיה מחפשים, וראינו את צורת הפתרונות למשוואה כתלות באופי השורשים הנ"ל (שונים, זהים, מרוכבים).

פיתרו את:

$$1. \quad x^2 y'' - 3x y' + 4y = 0 \quad 2. \quad x^2 y'' + 3x y' + 5y = 0$$

פיתרון

א. אחרי ההצבה נקבל : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt}$

וכשנציב במד"ר נקבל : $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$. וזו מד"ר לינארית מסדר שני ,
במקדמים קבועים שפתרונה :

$$c_1 \cos t + c_2 \sin t = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)$$

ב. 1. $y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln|x|$

2. $y = c_1 x^{-1} \cos(2 \ln|x|) + c_2 x^{-1} \sin(2 \ln|x|)$

3. לפי משפט , עבור המד"ר $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ כך שהנקודה

x_0 רגולרית (כלומר , כי $\frac{Q}{P}, \frac{R}{P}$ ניתנות לפיתוח לטור חזקות מסביב לנקודה

הנ"ל, אז הפיתרון הכללי למד"ר זו הוא מהצורה $y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$ כאשר a_0, a_1 קבועים ו- y_i פתרונות בעלי פיתוח לטור בעלי רדיוס התכנסות גדול לפחות משל המינימום מבין אלו של $\frac{Q}{P}, \frac{R}{P}$.

א. מצאו נוסחת נסיגה ו-4 איברים ראשונים בטור הפיתרון סביב האפס לבעייה :

$$y'' + (x-1)y' - y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$$

ב. משוואת Hermite היא מהצורה

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, -\infty < x < \infty$$

מיצאו את ארבעת האיברים הראשונים בשני הפתרונות הבלתי תלויים מסביב לאפס , והראו שאם λ מספר שלם זוגי אי שלילי אז אחד משני הפתרונות הוא פולינום. מצאו פולינומים אלו עבור $\lambda = 0, 2, 4$.

פיתרון :

א. נציב $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ומכאן נמצא ביטוי לנגזרת הראשונה והשנייה ונציב

במד"ר . נקבל : $a_2 = 0.5$, $a_n = \frac{a_{n+1}}{n+2} - \frac{n-1}{(n+2)(n+1)} a_n$, ל $n \geq 1$.

ומכאן נקבל איברים ראשונים : $y = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3*2}x^3 - \frac{1}{5*4*3}x^5 + \dots$

ב. $y_1 = 1 - \frac{\lambda}{2!}x^2 + \frac{\lambda(\lambda-4)}{4!}x^4 - \frac{\lambda(\lambda-4)(\lambda-8)}{6!}x^6 + \dots$

$$y_2 = x - \frac{\lambda-2}{3!}x^3 + \frac{(\lambda-2)(\lambda-6)}{5!}x^5 + \dots$$

כאשר נוסחת הנסיגה למקדמים היא : $a_{n+2} = \frac{(2n-\lambda)a_n}{(n+2)(n+1)}$. ממנה ניתן לראות

שאם $\lambda = 4k$, או $\lambda = 4k + 2$ כלומר מספר זוגי שמתחלק או לא מתחלק ב-4 , אז ניתן לראות מצורת הפתרונות למעלה כי כתלות בשארית המספר בחלוקה ב-4 (0 או 2) נקבל פיתרון אחד שהוא פולינום ! .

למשל : $\lambda = 0$ נקבל פולינום 1 .

$\lambda = 2$ נקבל פולינום : x

$\lambda = 4$ נקבל פולינום : $1 - 2x^2$

4. שיטת פרובניוס לפיתרון מסביב לנקודה סינגולארית – רגולרית:

פיתרו את המד"רים הבאים (כלומר מצאו את הפתרון הכללי עבורן):

א. $x^2 y'' - xy' + (1-x)y = 0$, $x > 0$, ליד $x = 0$

ב. $x^2 y'' + (x^2 + 2x)y' - 2y = 0$ ליד $x = 0$

ג. מצאו פתרון כללי (אפשר לפתח עד שלושה איברים בטור) סביב לנקודה הסינגולארית רגולרית :

$$xy'' + (1-x)y' - y = 0$$

פיתרון:

א. משוואה אינרציאלית : $r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow r = r_1 = r_2 = 1$, ונוסחת נסיגה למקדמים : $a_n = \frac{a_0}{(n!)^2}$, $n \geq 1$ ומכאן שפיתרון אחד יהיה מהצורה :

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} x^{n+1}$$

עבור הפיתרון השני נציג פיתרון כללי בצורת $y(x, r) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ אותו נציב במד"ר ונקבל נוסחת נסיגה למקדמים :

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{(n+r-1)^2}, n \geq 1 \quad \text{ונקבל פיתרון שני מהצורה :}$$

$$\frac{\partial y(x, r)}{\partial r} \quad \text{מחושב עבור } r=1 .$$

ב. הנקודה אפס היא סינגולארית רגולרית וכשנחפש פיתרון מהצורה

עם שורשים $r^2 + r - 2 = 0$ $y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ אינדיציאלית
 שהם $1, -2$, ונוסחת נסיגה עבור $n \geq 1$: $a_n = -\frac{1}{r+n+2} a_{n-1}$.

לאחר הצבה בנוסחת הנסיגה נקבל פיתרון אחד:

$$y_1 = a_0 x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3! x^n}{(n+3)!} = \frac{3a_0}{x^2} (2 - 2x + x^2 - 2e^{-x})$$

פיתרון שני עבור השורש -2 ייתן $y_2 = a_0 x^{-2} e^{-x}$.

ג. נקבל שורש מריבוי 2 למשוואה האינדיציאלית: $r=0$.

המקדמים (התלויים ב- r) הם מהצורה: $a_n(r) = \frac{a_0}{(r+1)(r+2)\dots(r+n)}$ עבור

$n \geq 1$. ואם נציב $r=0$ נקבל פיתרון: $y_1 = e^x$.

את הפיתרון השני נמצא בעזרת הנוסחה:

$$y_2 = y_1 \ln|x| + |x|^0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial y}{\partial r} \Big|_{r=0} \right) x^n = a_0 e^x \ln|x| + a_0 \left\{ -x - \frac{3}{4} x^2 - \frac{11}{36} x^3 + \dots \right\}$$

וניתן לקחת למשל $a_0 = 1$ או מספר אחר שונה מאפס.