לינארית 2 תרגול 9

27 במאי 2021

1 מרחב ניצב

יהי V ממ"פ, ותהי $S \subseteq V$, אזי המרחב הניצב ל־S הוא:

$$S^{\perp} = \{v \in V : \forall s \in S \langle v, s\rangle = 0\}$$

קבוצת כל הוקטורים ב־V האו"ג לכל וקטורי S.

תרגילים:

1. מצאו את $S^{\perp}$ עבור

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

פתרון: נשים לב:

$$S^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \wedge \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x + 2y + 3z & = 0 \\ y + 2z & = 0 \end{cases} \right\} = N \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נוודא ניצבות:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 - 4 + 3 = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = -2+2=0$$

הערה: $S^{\perp} = (span(S))^{\perp}$

2. יהי V מ"ו, $W \subseteq V$ תת־מרחב עם בסיס או"ג $B_W = \{w_1, \ldots, w_n\}$, ויהי $v \in V$.
ההיטל של v על W הוא הוקטור המסומן $\pi_W(v)$ המקיים:

(א) $\pi_W(v) \in W$

(ב) $v - \pi_W(v) \in W^{\perp}$

(ג) והוא הוקטור:

$$\pi_W(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i$$

(ד) מתקיים:

$$\pi_W(v) = \min_{w \in W} \|v - w\|$$

3. מצאו את ההיטל של $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ על $W = span \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

פתרון:

$$\pi_W(v) = \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{\langle v, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 =$$

$$= \frac{6}{14} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{0}{\cdots} w_2 = \frac{3}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2 תהליך גראם שמידט

המטרה: לקחת בסיס B של איזשהו מ"ו, ולהפוך אותו לבסיס או"נ של המרחב הוקטורי:

1. נתון $W \subseteq V$ מרחב ותת־מרחב. ונתון בסיס $B_W = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס של W.

2. נגדיר בסיס חדש $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ לפי הכלל:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \pi_{w_1}(v_2) = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} \cdot w_1$$

3. נניח שהגדרנו כך עד k, אז:

$$w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, w_i\rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i$$

4. ניקח את הקבוצה $\hat{B} = \{\hat{w_1}, \dots, \hat{w_n}\}$ כאשר

$$\hat{w_i} = \frac{w_i}{\|w_i\|}$$

$$1 = \langle \hat{w_i}, \hat{w_i}\rangle = \langle \frac{w_i}{\|w_i\|}, \frac{w_i}{\|w_i\|}\rangle = \frac{1}{\|w_i\|^2}\langle w_i, w_i\rangle = \frac{\|w_i\|^2}{\|w_i\|^2}$$

תרגילים:

1. מצאו בסיס או"נ של

$$W = span\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

פתרון: ניקח:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{8}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{14} \\ 1 \\ -\frac{2}{14} \\ \frac{4}{14} \end{pmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{11}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{\frac{10}{14}}{\frac{64+196+4+16}{14^2}}}_{=\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ 1 \\ -\frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{11}{14} + \frac{4}{14} \\ 1 - \frac{1}{2} \\ 2 - \frac{22}{14} + \frac{1}{14} \\ 2 - \frac{33}{14} - \frac{2}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

נותר לנרמל את שלושת הוקטורים:

$$\hat{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}w_1, \hat{w}_2 = \frac{14}{\sqrt{280}}w_2, \hat{w}_3 = 4w_3$$

3 משפט הפירוק הניצב

יהי V מרחב וקטורי, ויהי $W \subseteq V$ תת־מרחב. אזי מתקיים:

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

הסבר מהיר: יהי $v \in V$. נשים לב:

$$\pi_W(v) \in W$$

$$v - \pi_W(v) \in W^{\perp}$$

ואז:

$$v = \underbrace{v - \pi_W(v)}_{\in W^{\perp}} + \underbrace{\pi_W(v)}_{\in W}$$

תרגילים:

1. יהי V מ"ו, ויהי $W \subseteq V$ תת־מרחב. הוכיחו:

$$\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$$

פתרון: נתחיל בהכלה $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} \supseteq W$: יהי $w \in W$. כדי שיתקיים $w \in \left(W^{\perp}\right)^{\perp}$

צריך להראות שלכל $v \in W^{\perp}$ מתקיים $\langle w,v\rangle = 0$. ואכן, לפי הגדרת $W^{\perp} = \{v \in V : \langle v,w\rangle = 0 \forall w \in W\}$ נקבל $\langle w,v\rangle = 0$.
כעת, נשתמש במשפט הפירוק הניצב: מצד אחד מתקיים:

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

נסמן לצורך העניין $\dim V = n, \dim W = k$, ואז נקבל $\dim W^{\perp} = n-k$.
מצד שני, ניתן לפרק גם:

$$V = W^{\perp} \oplus \left(W^{\perp}\right)^{\perp}$$

ואז נקבל $\dim \left(W^{\perp}\right)^{\perp} = \dim V - \dim W^{\perp} = n-(n-k) = k$
כעת, מההכלה שהוכחנו, יחד עם שיוויון המימדים נקבל $W = \left(W^{\perp}\right)^{\perp}$. (הערה: אפשר להשתמש ביחידות הפירוק הניצב).

2. ניתן להוכיח גם שמתקיים: V מ"ו, $S \subseteq V$ תת־קבוצה. אז:

$$\left(S^{\perp}\right)^{\perp} = span(S)$$