פתרון תרגיל 12 – טופולוגיה 2014

**שאלה 1**

1. יהי  מ"ט עם בסיס ,  קבוצה ו- פונקציה **על**. הוכיחו/הפריכו:

בסיס לטופולוגיית המנה על .

1. יהי הישר של סורגנפריי ותהי  פונקציית הערך השלם.מצאו את טופולוגיית המנה  על  ביחס ל-.

**פתרון**

1. נפריך את הטענה על-ידי דוגמה נגדית מהתרגול. ניקח  מ"ט דיסקרטי כש- הוא בסיס המורכב מכל הנקודונים.

תהי  הקבוצה  ו-  מוגדרת ע"י . ראינו שבמקרה זה טופולוגית המנה  על  היא הדיסקרטית. נראה ש-  ולכן על-פי הסעיף הקודם  אינו בסיס לטופולוגיית המנה על . ואכן, אחרת, אבל אז נקבל מהגדרת  ש-  בסתירה להגדרת .

דוגמה נוספת: , נבחר , ונגדיר את  על-ידי . אזי  הוא לא בסיס ל- (בדקו!).

1.  הטופולוגיה הדיסקרטית. הוכחנו בעבר ש- פונקציית הערך השלם רציפה ולכן נקבל מיידת ש- .

**שאלה 2**

נתבונן ב- עם הטופולוגיה הסטנדרטית ובפונקצית הערך השלם . נסמן ב-את טופולוגיית המנה על  ביחס ל-.

1. הוכיחו שמתקיים  אם  אז .
2. הסיקו כי .

**פתרון**

1.  נניח ש . מתקיים , אמנם, . כמו כן מכיון ש- טופולוגיית מנה ו-  נקבל ש  פתוחה ב- (ולכן היא סביבה של ). לכן קיים  כך ש-. בפרט, קיים  המקיים . מכאן, .

תהי  כך שאם  אז . נראה ש- לפי הגדרת טופולגיית מנה. נחלק למקרים:

מקרה ראשון: . קל לראות ש-  פתוחה ב- ולכן .

מקרה שני:  וקיים ל- מקסימום . קל לראות ש- פתוחה ב- ולכן .

מקרה שלישי:  ללא חסם מלעיל. מהתנאי נקבל ש- . במצב זה,  פתוחה ב-.

1. מהאפיון שהוכחנו ובייחוד מהכיוון  נקבל ש- .

**שאלה 3**

1. יהיו  מ"ט,  רציפות ומתקיים . הוכיחו כי  העתקת מנה.
2. תהי  העתקת מנה. הוכיחו כי  הומיאומורפיזם  חח"ע.

**פתרון**

1. עלינו להוכיח שני תנאים:
2.  על – נובע מכך שפונקצית הזהות היא על.
3.  פתוחה  פתוחה. כיוון  ברור מרציפותה של . נוכיח את הכיוון השני. תהי  פתוחה ב- . בשל רציפות ,  פתוחה ב- . מאידך . והוכחנו הדרוש.
4.  מיידי מהגדרת הומיאומורפיזם.

 מספיק להוכיח כי ההעתקה פתוחה (רציפות ועל נובעות מכך ש- היא העתקת מנה, חח"ע נתונה). תהי  פתוחה.  (שימו לב שהשוויון מתקיים מכיוון ש- חח"ע), מכיוון ש- פתוחה ב-נקבל ע"פי הגדרת העתקת מנה ש-  פתוחה ב- .

**שאלה 4**

1. נגדיר יחס שקילות על : . הוכיחו כי  הומיאומורפי ל- .   
   רמז: מצאו את ההעתקה ההפוכה ל -  מ-  ל - .
2. נגדיר יחס שקילות על : . לְמה הומיאומורפי ?

**פתרון**

1. נגדיר על-ידי .מתקיים ,  
   לכן  המוגדרת על-ידי היא חח"ע; ומכיוון ש- רציפה כך גם .

נראה ש- רציפה:  
תהי  מוגדרת על-ידי  אזי  באשר

 ולכן  רציפה כהרכבת רציפות (שימו לב ש- רציפה כפונקציה לתוך מרחב מכפלה, אשר רציפה רכיב רכיב. בנוסף, שימו לב שהטופולוגיה האוקלידית על  מתלכדת עם טופולוגיית המכפלה). נותר להוכיח כי .

לכן ההרכבה  היא הזהות ( ). ניתן להראות שההרכבה בכיוון השני נותנת גם היא את פונקציית הזהות ().

מכאן  רציפה וקיבלנו בסה"כ ש- הומיאומורפי ל-.

1. נגדיר על-ידי . (שימו לב ש- על ). בדיוק כמו בסעיף א' מסיקים ש- חח"ע ורציפה וגם כאן אם נגדיר  על-ידי בדומה לסעיף א' ניתן לבדוק ולראות ש- (בדקו הרכבה בשני הכיוונים ותקבלו את פונקציות זהות). כעת מספיק להוכיח ש- רציפה. ואמנם  באשר ולכן  רציפה כהרכבת רציפות וקיבלנו בסה"כ ש-.

**שאלה 5**

יהי מרחב המנה של  המתקבל מיחס השקילות הבא:

. הראו ש-הומיאומורפי ל-.

**פתרון**

המועמד הטבעי .

מתקיים ולכן  חח"ע.



 רציפה ולכן  רציפה.

נמצא את הפונקציה ההופכית של . נגדיר:  על-ידי:.

לכל מתקיים:.

מצד שני, לכל  מתקיים .

לכן  היא הפונקיצה ההופכית של . קל לראות ש-ומכיון ש- רציפה אז גם .

בסה"כ  רציפה, הפיכה ו-רציפהולכן  הומיאומורפיזם.

דרך אחרת: ניתן להראות ש- היא העתקה פתוחה (תמונה של קטע פתוח היא קבוצה פתוחה) ולכן מנה (שכן היא רציפה ועל) ולכן  מנה (שכן היא חח"ע).

**שאלה 6**

יהי  מרחב המנה של  המתקבל על-ידי זה שמזהים זו לזו את כל הנקודות  כך ש-. בלשון אחרת,  הוא מרחב המנה  כאשר  הוא יחס שקילות המוגדר באופן הבא:  אם ורק אם  או  וגם . הראו ש- הומיאומורפי למעגל .

**פתרון**

תזכורת: הקטע  כשמזהים בו את הנקודות  הומיאומורפי ל-.

נגדיר פונקציה  המכבדת את יחס השקילות.

כל הנקודות מחוץ ל-  עוברות לאותה נקודה במנה, ולכן נעתיק את  לאותה נקודה אליה נשלחות.

אנחנו יודעים איך להעתיק את  ל- ולכן נעתיק את  ל- הומיאומורפית על-ידי הפונקציה הטבעית המוגדרת על-ידי (שימו לב ש-). לאחר מכן נרכיב אותה עם הפונקציה הידועה המוגדרת על-ידי (שימו לב שהנקודות  עוברות תחת  לנקודה ). לכן, .

כעת  מוגדרת באופן הבא:

.

תת-טענה: רציפה.

תת-הוכחה: נשתמש במשפט שראינו בכיתה:  מ"ט, ויהי  כיסוי סגור של , כלומר  סגורה עבור , ומתקיים . אם  פונקציה כך ש-  רציפה לכל , אזי  רציפה.

במקרה שלנו, מתקייםוכן  ומכאן הן סגורות המקיימות את תנאי המשפט, ולכן  רציפה.

מש"ל תת-טענה.

**סיכום ביניים:**

*  רציפה ועל;



* מתקיים  אם ורק אם 

ולכן חח"ע;

*  רציפה  רציפה;
*  על  על.

נוכיח כעת ש- הוא מרחב קומפקטי: נשים לב שצמצום העתקת המנה היא העתקה רציפה ו**על** ממרחב קומפקטי, ולכן גם התמונה היא מרחב קומפקטי.

כעת  רציפה מקומפקטי להאוסדורף, ולכן היא העתקה סגורה.

כלומר  רציפה, סגורה, חח"ע ו**על**, ולכן היא הומיאומורפיזם.

**שאלה 7**

מצאו דוגמה להעתקת מנה שאינה פתוחה ואינה סגורה.

**פתרון**

בתרגול האחרון פתרנו את התרגיל הבא:

*נתבונן במרחב שרפינסקי (Sierpinsky). זהו המרחב עם הטופולוגיה .*

1. *הוכיחו שמרחב שרפינסקי אינו מטריזבילי.*
2. *יהי ותהי  מוגדרת על-ידי .*

*נגדיר יחס שקילות על  באופן הבא:  הוכיחו כי הומיאמורפי למרחב שרפינסקי.*

הפונקציה  היא פונקצית מנה ונראה כעת שהיא אינה פתוחה ואינה סגורה.

אינה פתוחה:  פתוחה ב- וגם .

אינה סגורה:  סגורה ב- וגם  אינה סגורה ב-.

**בּהצלחה בבחינה!**