תרגול 13-אושרית

תרגול חזרה

3. יהיו A, B קבוצות. הוכיחו/הפריכו:

(א) אם $B \subsetneq A$ אז $|A| < |B|$

3. יהיו A, B קבוצות. הוכיחו/הפריכו:

(א) אם $A \subsetneq B$ אז $|A| < |B|$

פתרון: לא נכון. למשל $B = \mathbb{Z}$. $A = \mathbb{N}$ מתקיים כי A תת קבוצה של Bולא שווה לה אבל העוצמות שוות.

(ב) אם $|A| = |B|$ אז $|A \backslash B| = |B \backslash A|$

3. יהיו A, B קבוצות. הוכיחו/הפריכו:

(א) אם $A \subsetneq B$ אז $|A| < |B|$

פתרון: לא נכון. למשל $B = \mathbb{Z}$.$A = \mathbb{N}$ מתקיים כי A תת קבוצה של Bולא שווה לה אבל העוצמות שוות.

(ב) אם $|A| = |B|$ אז $|A \backslash B| = |B \backslash A|$

פתרון: לא נכון. למשל $B = \mathbb{Z}$.$A = \mathbb{N}$ מתקיים כי A וBשוות עוצמה אבל $|A \backslash B| = 0$ ו $|B \backslash A| = \aleph_0$.

מבחן 2019 מועד ב

1. (20 נק'. 5 נק' לסעיף) תהיינה קבוצות A, B, C. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$.

מבחן 2019 מועד ב

הגדרת קבוצת החזקה

1. (20 נק'. 5 נק' לסעיף) תהיינה קבוצות A, B, C. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$.

פתרון: הוכחה: יהא $X \in P(A) \cup P(B)$ אזי $X \in P(A) \vee X \in P(B)$ שגורר כי $X \subseteq A \vee X \subseteq B$. כיוון ש $A, B \subseteq A \cup B$ נקבל לפי טר' שבכל מקרה $X \subseteq A \cup B$ ולכן $X \in P(A \cup B)$.

(ב) $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash C$

מבחן 2019 מועד ב

הגדרת קבוצת החזקה

תהיינה קבוצות A, B, C. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$.

פתרון: הוכחה: יהא $X\in P(A)\cup P(B)$ אזי $X\in P(A)\vee X\in P(B)$ שגורר כי $X\subseteq A\vee X\subseteq B$. כיוון ש $A,B\subseteq A\cup B$
נקבל לפי טר' שבכל מקרה $X\subseteq A\cup B$ ולכן $X\in P(A\cup B)$.

(ב) $A\cap(B\backslash C)=(A\cap B)\backslash C$

פתרון: הוכחה: נגדיר קבוצה אוניברסלית $U=A\cup B\cup C$ ואז

$$A\cap(B\backslash C)=A\cap(B\cap C^c)=(A\cap B)\cap C^c=(A\cap B)\backslash C$$

לפי הגדרת הפרש

אסוציאטיביות החיתוך

הגדרת הפרש

כנדרש.

(ג) אם $P(A)\cap P(B)=A$ אז $B\subseteq A$

מבחן 2019 מועד ב

הגדרת קבוצת החזקה

1. (20 נק'. 5 נק' לסעיף) תהיינה קבוצות A, B, C. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$.

פתרון: הוכחה: יהא $X \in P(A) \cup P(B)$ אזי $X \in P(A) \vee X \in P(B)$ שגורר כי $X \subseteq A \vee X \subseteq B$. כיוון ש $A, B \subseteq A \cup B$ נקבל לפי טר' שבכל מקרה $X \subseteq A \cup B$ ולכן $X \in P(A \cup B)$.

(ב) $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash C$

פתרון: הוכחה: נגדיר קבוצה אוניברסלית $U = A \cup B \cup C$ ואז

$$A \cap (B \backslash C) = A \cap (B \cap C^c) = (A \cap B) \cap C^c = (A \cap B) \backslash C$$

כנדרש.

(ג) אם $P(A) \cap P(B) = A$ אז $B \subseteq A$

פתרון: הפרכה: נגדיר $B = \{1\}$, $A = \{\emptyset\}$ אזי $P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\} = A$ אבל B לא מוכל ב A .

מבחן 2019 מועד א:

1. (20 נק'. 5 נק' לסעיף) תהיינה קבוצות A, B, C. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) $P(A \times B) = P(A) \times P(B)$.

מבחן 2019 מועד א:

נשים לב כי $A \times B = \emptyset$

1. (20 נק'. 5 נק' לסעיף) תהיינה קבוצות A, B, C. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) $P(A \times B) = P(A) \times P(B)$.

i. פתרון: הפרכה: עבור $A = B = \emptyset$ נקבל כי $P(A \times B) = \{\emptyset\} \neq \{(\emptyset, \emptyset)\} = P(A) \times P(B)$.

(ב) $(A \times B) \setminus (A \times C) = A \times (B \setminus C)$

מבחן 2019 מועד א:

1. (20 נק'. 5 נק' לסעיף) תהיינה קבוצות A,B,C. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) $P(A\times B)=P(A)\times P(B)$.

i. פתרון: הפרכה: עבור $A=B=\emptyset$ נקבל כי $P(A\times B)=\{\emptyset\}\neq\{(\emptyset,\emptyset)\}=P(A)\times P(B)$.

(ב) $(A\times B)\setminus(A\times C)=A\times(B\setminus C)$

הכלה דו כיוונית

פתרון: הוכחה: $(\subseteq)$ יהא $y\in(A\times B)\setminus(A\times C)$ אזי $y\in A\times B$
ולכן קיימים $a\in A, b\in B$ כך ש $y=(a,b)$. כיוון ש $y\notin A\times C$ $(a,b)=$ נקבל כי $b\notin C$. ולכן $b\in B\setminus C$ ומכאן ש $y=(a,b)\in A\times(B\setminus C)$.
$(\supseteq)$יהא $y\in A\times(B\setminus C)$ אזי קיימים $a\in A, b\in B\setminus C$ כך ש $y=(a,b)$. מהגדרה $b\in B, b\notin C$ ולכן $(a,b)\in A\times B, (a,b)\notin A\times C$ ולכן $y=(a,b)\in(A\times B)\setminus(A\times C)$

(ג) אם $A\in B$ ו $B\in C$ אז $A\in C$

מבחן 2019 מועד א:

1. (20 נק'. 5 נק' לסעיף) תהיינה קבוצות A, B, C. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) $P(A \times B) = P(A) \times P(B)$.

i. פתרון: הפרכה: עבור $A = B = \emptyset$ נקבל כי $P(A \times B) = \{\emptyset\} \neq \{(\emptyset, \emptyset)\} = P(A) \times P(B)$.

(ב) $(A \times B) \setminus (A \times C) = A \times (B \setminus C)$

פתרון: הוכחה: $(\subseteq)$ יהא $y \in (A \times B) \setminus (A \times C)$ אזי $y \in A \times B$
ולכן קיימים $a \in A, b \in B$ כך ש $y = (a, b)$. כיוון ש $y \notin A \times C$ נקבל כי $(a, b) = y \notin A \times C$ נקבל כי $b \notin C$. ולכן $b \in B \setminus C$ ומכאן ש $y = (a, b) \in A \times (B \setminus C)$.
$(\supseteq)$ יהא $y \in A \times (B \setminus C)$ אזי קיימים $a \in A, b \in B \setminus C$ כך ש $y = (a, b)$. מהגדרה $b \in B, b \notin C$ ולכן $(a, b) \in A \times B, (a, b) \notin A \times C$ ולכן $y = (a, b) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$

(ג) אם $A \in B$ ו $B \in C$ אז $A \in C$

פתרון: הפרכה: $A = \emptyset, B = \{A\}, C = \{B\}$ מקיימות את ה"אם" אבל $A \notin C$.

(ד) אם $C \setminus A = C \setminus B$ אז $C \cap A = C \cap B$

מבחן 2019 מועד א:

1. (20 נק'. 5 נק' לסעיף) תהיינה קבוצות A,B,C. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) $P(A\times B)=P(A)\times P(B)$.

i. פתרון: הפרכה: עבור $A=B=\emptyset$ נקבל כי $P(A\times B)=\{\emptyset\}\neq\{(\emptyset,\emptyset)\}=P(A)\times P(B)$.

(ב) $(A\times B)\setminus(A\times C)=A\times(B\setminus C)$

פתרון: הוכחה: $(\subseteq)$ יהא $y\in(A\times B)\setminus(A\times C)$ אזי $y\in A\times B$ ולכן קיימים $a\in A,b\in B$ כך ש $y=(a,b)$. כיוון ש $y\notin A\times C$ נקבל כי $(a,b)=y\notin A\times C$ נקבל כי $b\notin C$. ולכן $b\in B\setminus C$ ומכאן ש $y=(a,b)\in A\times(B\setminus C)$.

$(\supseteq)$יהא $y\in A\times(B\setminus C)$ אזי קיימים $a\in A,b\in B\setminus C$ כך ש $y=(a,b)$. מהגדרה $b\in B,b\notin C$ ולכן $(a,b)\in A\times B,(a,b)\notin A\times C$ ולכן $y=(a,b)\in(A\times B)\setminus(A\times C)$

(ג) אם $A\in B$ ו $B\in C$ אז $A\in C$

פתרון: הפרכה:$A=\emptyset,B=\{A\},C=\{B\}$ מקיימות את ה"אם" אבל $A\notin C$.

(ד) אם $C\setminus A=C\setminus B$ אז $C\cap A=C\cap B$

פתרון: הוכחה: כיוון ש $C=(C\cap A)\cup(C\setminus A)$, $C=(C\cap B)\cup(C\setminus B)$ ושני האיחודים זרים נוכל לחשוב על C כקבוצה אוניברסלית ו $C\setminus A,C\setminus B$ כתתי קבוצות שלה. כעת נניח כי $C\setminus A=C\setminus B$ ולכן $C\cap A=(C\setminus A)^c=(C\setminus B)^c=C\cap B$ כנדרש.

מבחן 2019 מועד ב:

2. (20 נק') נגדיר יחס S על $\mathbb{R}$ ע"י הכלל: aSb אמ"מ $a - b \in \mathbb{Z}$

(א) הוכיחו כי S יחס שקילות.

מבחן 2019 מועד ב:

2. (20 נק') נגדיר יחס S על $\mathbb{R}$ ע"י הכלל: aSb אמ"מ $a-b\in\mathbb{Z}$

(א) הוכיחו כי S יחס שקילות.

פתרון: רפלקסיביות: לכל a ממשי מתקיים כי $a-a=0\in\mathbb{Z}$ ולכן aSa.

סימטריות: נניח a,b ממשיים כך ש aSb אזי $a-b\in\mathbb{Z}$ ולכן גם $b-a=-(a-b)\in\mathbb{Z}$ מה שגורר כי bSa.

טרנזיטיביות: נניח a,b,c ממשים כך ש $aSb\wedge bSc$ אזי $[a-b\in\mathbb{Z}]\wedge[b-c\in\mathbb{Z}]$ כיוון שחיבור של מספרים שלמים הוא שלם נקבל כי $a-c=(a-b)+(b-c)\in\mathbb{Z}$ מה שגורר ש aSc.

(ב) מצאו את מחלקות השקילות $[0]_S,[0.5]_S$.

מבחן 2019 מועד ב:

2. (20 נק') נגדיר יחס S על $\mathbb{R}$ ע"י הכלל: aSb אמ"מ $a-b \in \mathbb{Z}$

(א) הוכיחו כי S יחס שקילות.

פתרון: רפלקסיביות: לכל a ממשי מתקיים כי $a-a=0 \in \mathbb{Z}$ ולכן aSa.

סימטריות: נניח a,b ממשיים כך ש aSb אזי $a-b \in \mathbb{Z}$ ולכן גם $b-a=-(a-b) \in \mathbb{Z}$ מה שגורר כי bSa.

טרנזיטיביות: נניח a,b,c ממשים כך ש $aSb \wedge bSc$ אזי $[a-b \in \mathbb{Z}] \wedge [b-c \in \mathbb{Z}]$ כיוון שחיבור של מספרים שלמים הוא שלם נקבל כי $a-c=(a-b)+(b-c) \in \mathbb{Z}$ מה שגורר ש aSc.

(ב) מצאו את מחלקות השקילות $[0]_S, [0.5]_S$.

פתרון: לפי הגדרה

$$[0]_S = \{x \in \mathbb{R} \mid xS0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x-0 \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$$

באופן דומה

$$\begin{aligned}[0.5]_S &= \{x \in \mathbb{R} \mid xS0.5\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x-0.5 \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists z \in \mathbb{Z} : x-0.5=z\} = \{z+0.5 \mid z \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

(ג) הוכיחו/הפריכו: לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $[-x]_S = [x]_S$.

(ג) הוכיחו/הפריכו: לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $[x]_S = [-x]_S$.

פתרון: הפרכה: למשל, נראה כי $[\frac{1}{4}]_S \neq [-\frac{1}{4}]_S$. זה שקול להראות כי $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \notin S$ וזה אכן מתקיים כי $\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

(ד) קבעו האם עוצמת קבוצת המנה $|\mathbb{R}/S|$ היא $\aleph_0, \aleph$, סופית או אחרת. הוכיחו קביעתכם.

(ג) הוכיחו/הפריכו: לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $[x]_S = [-x]_S$.

פתרון: הפרכה: למשל, נראה כי $[\frac{1}{4}]_S \neq [-\frac{1}{4}]_S$. זה שקול להראות כי $(\frac{1}{4}. -\frac{1}{4}) \notin S$ וזה אכן מתקיים כי $\frac{1}{4} - (-\frac{1}{4}) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

(ד) קבעו האם עוצמת קבוצת המנה $|\mathbb{R}/S|$ היא $\aleph, \aleph_0$, סופית או אחרת. הוכיחו קביעתכם.

פתרון: נוכיח כי $\aleph = |\mathbb{R}/S|$. מצד אחד: הפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/S$ המוגדרת $f(x) = [x]_S$ היא על (לפי הגדרה) ולכן $|\mathbb{R}/S| \leq |\mathbb{R}| = \aleph$.

מצד שני נוכיח כי הפונקציה $g : (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}/S$ המוגדרת $g(x) = [x]_S$ היא חח"ע ואז $\left|(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})\right| \leq |\mathbb{R}/S|$ = $\aleph$ ואז לפי ק.ש.ב יש שיוויון. הוכחה: יהיו $x_1 \neq x_2$ ב $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ אזי $|x_1 - x_2| \in (0, \frac{1}{4})$ ובפרט $x_1 - x_2$ אינו שלם. לכן $(x_1, x_2) \notin S$ מה ששקול לכך ש $g(x_1) = [x_1]_S \neq [x_2]_S = g(x_2)$ כנדרש.

מבחן 2019 מועד ב:

(א) (10 נק') תהי פונקציה $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ונגדיר יחס R על $\mathbb{N}$ ע"י הכלל: aRb אמ"מ $f(a) \leq f(b)$.

i. הוכיחו שאם f חח"ע אז R יחס סדר חלקי ב-$\mathbb{N}$.

מבחן 2019 מועד ב:

(א) (10 נק') תהי פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ונגדיר יחס R על $\mathbb{N}$ ע"י הכלל: aRb אמ"מ $f(a)\le f(b)$.

i. הוכיחו שאם f חח"ע אז R יחס סדר חלקי $\mathbb{N}$.

פתרון: רפלקסיביות: לכל a טבעי מתקיים כי $f(a)=f(a)$ ובפרט $f(a)\le f(a)$ ולכן aRa.

אנטי סימטריות : נניח a,b טבעיים כך ש $aRb\wedge bRa$ אזי $[f(a)\le f(b)]\wedge[f(b)\le f(a)]$ ולכן $f(a)=f(b)$.

אם f חח"ע אזי $a=b$.

טרנזיטיביות: נניח a,b,c ממשים כך ש $aRb\wedge bRc$ אזי $[f(a)\le f(b)]\wedge[f(b)\le f(c)]$ כיוון ש"קטן שווה" הוא טרנזיטיבי, נקבל כי $f(a)\le f(c)$ מה שגורר ש aRc.

ii. תנו דוגמה ל f שעבורה R אינו יחס סדר חלקי על $\mathbb{N}$.

מבחן 2019 מועד ב:

(א) (10 נק') תהי פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ונגדיר יחס R על $\mathbb{N}$ ע"י הכלל: aRb אמ"מ $f(a)\le f(b)$.

i. הוכיחו שאם f חח"ע אז R יחס סדר חלקי $\mathbb{N}$.

פתרון: רפלקסיביות: לכל a טבעי מתקיים כי $f(a)=f(a)$ ובפרט $f(a)\le f(a)$ ולכן aRa.

אנטי סימטריות: נניח a,b טבעיים כך ש $aRb\wedge bRa$ אזי $[f(a)\le f(b)]\wedge[f(b)\le f(a)]$ ולכן $f(a)=f(b)$.

אם f חח"ע אזי $a=b$.

טרנזיטיביות: נניח a,b,c ממשים כך ש $aRb\wedge bRc$ אזי $[f(a)\le f(b)]\wedge[f(b)\le f(c)]$ כיוון ש"קטן שווה" הוא טרנזיטיבי, נקבל כי $f(a)\le f(c)$ מה שגורר ש aRc.

ii. תנו דוגמה ל f שעבורה R אינו יחס סדר חלקי על $\mathbb{N}$.

פתרון: למשל, הפונקציה הקבועה על 1, כלומר, לכל x טבעי נגדיר $f(x)=1$ ואז לפי הגדרה $1R2$ ו $2R1$ ומכיוון ש $2\neq 1$ נקבל כי R אינו אנטי סימטרי ובפרט אינו יחס סדר חלקי.

(ב) (10נק') תהא $f:X\to Y$ פונקציה הפיכה. הוכיחו שלכל $A\subseteq X$ מתקיים כי $f[X\setminus A]=Y\setminus f[A]$.

מבחן 2019 מועד ב:

(א) (10 נק') תהי פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ונגדיר יחס R על $\mathbb{N}$ ע"י הכלל: aRb אמ"מ $f(a)\leq f(b)$.

i. הוכיחו שאם f חח"ע אז R יחס סדר חלקי $\mathbb{N}$.

פתרון: רפלקסיביות: לכל a טבעי מתקיים כי $f(a)=f(a)$ ובפרט $f(a)\leq f(a)$ ולכן aRa.
אנטי סימטריות סימטריות: נניח a,b טבעיים כך ש $aRb\wedge bRa$ אזי $[f(a)\leq f(b)]\wedge[f(b)\leq f(a)]$ ולכן $f(a)=f(b)$.
אם f חח"ע אזי $a=b$.
טרנזיטיביות: נניח a,b,c ממשים כך ש $aRb\wedge bRc$ אזי $[f(a)\leq f(b)]\wedge[f(b)\leq f(c)]$ כיוון ש"קטן שווה" הוא טרנזיטיבי, נקבל כי $f(a)\leq f(c)$ מה שגורר ש aRc.

ii. תנו דוגמה ל f שעבורה R אינו יחס סדר חלקי על $\mathbb{N}$.

פתרון: למשל, הפונקציה הקבועה על 1, כלומר, לכל x טבעי נגדיר $f(x)=1$ ואז לפי הגדרה $1R2$ ו $2R1$ ומכיוון ש $2\neq 1$ נקבל כי R אינו אנטי סימטרי ובפרט אינו יחס סדר חלקי.

(ב) (10נק') תהא $f:X\to Y$ פונקציה הפיכה. הוכיחו שלכל $X\subseteq A$ מתקיים כי $f[X\setminus A]=Y\setminus f[A]$.

פתרון: תהא A ת"ק של X ונראה את השיוויון המבוקש ע"י הכלה דו כיוונית.

($\subseteq$) יהא $y\in f[X\setminus A]$ אזי קיים $x\in X\setminus A$ כך ש $y=f(x)$. כיוון ש $x\in X$ אזי $y=f(x)\in Y$. בנוסף, $x\notin A$ ו f חח"ע ולכן $f(x)\notin f[A]$ (אחרת $f(x)=f(a)$ עבור $a\in A$ ומחח"ע של f נקבל $x=a\in A$. סתירה). מצירוף השניים נקבל כי $y=f(x)\in Y\setminus f[A]$.

($\supseteq$)יהא $y\in Y\setminus f[A]$. כיוון ש $y\in Y$ ו f על, קיים $x\in X$ כך ש $f(x)=y$. כיוון ש $y\notin f[A]$ נקבל כי $x\notin A$ (אחרת $x\in A$ ואז $y=f(x)\in f[A]$. סתירה). קיבלנו כי $x\in X\setminus A$ ולכן $y=f(x)\in f[X\setminus A]$ כנדרש.

מבחן 2019 מועד ב:

20 נק').

(א) נגדיר סדרת קבוצות ע"י $A_1 = \emptyset$ ולכל n טבעי נגדיר $A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}$.

i. (3 נק') מצאו את A_2, A_3, A_4.

מבחן 2019 מועד ב:

20 נק').

(א) נגדיר סדרת קבוצות ע"י $A_1 = \emptyset$ ולכן n טבעי נגדיר $A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}$.

i. (3 נק') מצאו את A_2, A_3, A_4.

פתרון: מהגדרה

$$A_2 = A_1 \cup \{A_1\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$$

$$A_3 = A_2 \cup \{A_2\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$A_4 = A_3 \cup \{A_3\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

ii. (10 נק') הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי ולכל $k < n$ טבעי מתקיים כי $A_k \in A_n$.

מבחן 2019 מועד ב:

20 נק').

(א) נגדיר סדרת קבוצות ע"י $A_1 = \emptyset$ ולכן n טבעי נגדיר $A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}$.

i. (3 נק') מצאו את A_2, A_3, A_4.

פתרון: מהגדרה

$$A_2 = A_1 \cup \{A_1\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$$

$$A_3 = A_2 \cup \{A_2\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$A_4 = A_3 \cup \{A_3\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

ii. (10 נק') הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי ולכל $k < n$ טבעי מתקיים כי $A_k \in A_n$.

פתרון: באינדוקציה על n: עבור $n = 1$ אין $k < n$ טבעי ולכן הטענה מתקיימת. כעת נניח נכונות עבור n ונוכיח עבור $n + 1$. יהא $k < n + 1$ ונראה כי $A_k \in A_{n+1}$.

אם $k = n$ אזי, לפי הגדרה $A_n \in \{A_n\} \subseteq A_n \cup \{A_n\} = A_{n+1}$.

אחרת $k < n$ ואז לפי הנחת האינדוקציה $A_k \in A_n$ כיוון ש $A_n \subseteq A_n \cup \{A_n\} = A_{n+1}$ נקבל כי $A_k \in A_{n+1}$.

מבחן 2018:

(12 נק') קבעו והוכיחו לכל קבוצה אם היא מעוצמת $\aleph_0, \aleph, 2^{\aleph}$ או סופית.

אם היא סופית רשמו את מספר האיברים בקבוצה.

i. $A = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$

ii. $B \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ אוסף הפונקציות <u>העל</u> מהטבעיים לקבוצה $\{0,1\}$.

iii. $C \subseteq P(\mathbb{N})^{\mathbb{Q}}$ אוסף הפונקציות ההפיכות מהרציונליים לקבוצת החזקה של הטבעיים.

<u>סעיף א1</u>

$$\left|\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}\right| = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph \leftarrow |\mathbb{Q}| = \aleph_0, |\mathbb{N}| = \aleph_0$$

<u>סעיף א2</u>

קיימות רק שתי פונקציות לא על מהטבעיים לקבוצה $\{0,1\}$. הורדת מספר סופי של איברים מקבוצה אינסופית לא משנה את עוצמת הקבוצה. $|B| = \left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right| = 2^{\aleph_0} = \aleph$.

<u>סעיף א3</u>

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$ ולכן $|\mathbb{N}| \neq |P(\mathbb{Q})|$ אין פונקציה חח"ע ועל (כלומר: הפיכה) מהרציונליים לקבוצה $P(\mathbb{N})$.

התשובה היא אפס.

בהצלחה!!!