תרגול חזרה באינפי 2

2 ביולי 2017

שאלה 1:

נניח ש־$f(x)$ אינטגרבילית מקומית בקטע $[1,\infty)$(כלומר היא אינטגרבילית בכל תת קטע סגור של $[1,\infty)$), כך שהאינטגרל $\int_1^\infty f\left(x\right)dx$ מתכנס.

א) האם בהכרח $\int_1^\infty f^2\left(x\right)dx$ מתכנס?

ב) האם בהכרח $\int_1^\infty f\left(x^2\right)dx$ מתכנס?

פתרון:

א) הפרכה: נתבונן בפונקציה $f\left(x\right)=\frac{sin(x)}{\sqrt{x}}$ ברור שפונקציה זו אינטגרבילית מקומית ב־$[1,\infty)$, ואינטגרל הלא אמיתי שלה

$\int_1^\infty \frac{sin(x)}{\sqrt{x}}$ מתכנס לפי דיריכלה, אבל $\int_1^\infty \frac{sin^2(x)}{x}$ מתבדר.

נרשום $\int_1^\infty \frac{1-cos(2x)}{2x}=\int_1^\infty \frac{sin^2(x)}{x}$ אם האינטגרל מצד ימין מתכנס אזי $\int_1^\infty \frac{1-cos(2x)}{2x}+$ $\int_1^\infty \frac{1}{2x}=\int_1^\infty \frac{cos(2x)}{2x}$ ולכן האינטגרל מימין מתכנס, וזו סתירה.

ב) הוכחה:

נעשה הצבה: $t=x^2$ ולכן $dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ ולכן נקבל את האינגרל הבא: $\int_1^\infty \frac{f(x^2)}{2\sqrt{t}}$ שהוא אינגרל מתכנס לפי מבחן דיריכלה. (משפט נוסף שמצדיק התכנסות הוא מבחן אבל להתכנסות אינטגרלים).

שאלה 2

נניח שלכל n הפונקציה $f_n(x)$ מוגדרת ורציפה במ"ש בקטע (a,b) . עוד נניח שקיים $f(x)=lim_{n\to\infty}f_n(x)$ במ"ש ב־(a,b). הוכיחו ש־$f(x)$ רציפה במ"ש ב־(a,b).

פתרון:

משום שההתכנסות הינה במ"ש אזי פונקציה גבולית $f(x)$ רציפה . צ"ל לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in I$ אם $|x-y|<\delta$ אזי

$|f(x)-f(y)|<\epsilon$.

יהי $\epsilon>0$. אזי קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>n_0$: $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\epsilon}{3}$ וגם $|f_n(x)-f_n(y)|<\frac{\epsilon}{3}$

ולכן: $|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f_n(x)+f_n(x)+f(y)-f_n(y)+f_n(y)|\le$

$|f(x)-f_n(x)|+|f(y)-f_n(y)|+|f_n(y)+f_n(x)|\le\epsilon$

ולכן אותו n_0 עושה את העבודה.

שאלה 3

א) הראה כי הפרש של שתי סדרות פונקציות המתכנסות במ"ש בקטע מתכנס אף הוא במ"ש.

ב) הראה כי אם טור פונקציות $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ מתכנס במ"ש ב־I אז גם סדרת הפונקציות $\{f_k(x)\}$ מתכנסת במ"ש לאפס ב־I.

פתרון:

א) נגדיר$h_n(x)=f_n(x)-g_n(x)$.

צ"ל : לכל $\epsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כל שלכל $n>n_0$ ולכל $x\in I$: $|h_n(x)-h(x)|<\epsilon$.

יהי $\epsilon>0$, לפי הנתון $f_n(x)\to f(x)$ במ"ש ב־I , גם $g_n(x)\to g(x)$ שם.

אני נוכיח ש־$f_n(x)+g_n(x)\to f(x)+g(x)$ במ"ש ב־I.

נבחור n_0 טבעי כך שלכל $n>n_0$ $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\epsilon}{2}$ וגם $|g_n(x)-g(x)|\le\frac{\epsilon}{2}$

ולכן $|f_n(x)-g_n(x)-(f(x)-g(x))|=|f_n(x)-f(x)-(g_n(x)-g(x))|\le$

$|f_n(x)-f(x)|+|g_n(x)-g(x)|\le\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$ ולכן נבחר אותו n_0.

ב) נתבונן בסדרת הסכומים החלקיים של הטור: $S_n(x)-S_{n-1}(x)=f_n(x)$ ולכן לפי מבחן ה־$lim(sup)$ נקבל :

$lim_{n\to\infty}sup_{x\in I}|f_n(x)|=lim_{n\to\infty}sup_{x\in I}|S_n(x)-S(x)|=0$.

שאלה 4

יהא C מספר קבוע ותהא $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית ב־$[a,b]$ כל שבכל נקודה רציונאלית בקטע מתקיים $f(x)=c$.

הראה כי בהכרח $\int_a^b f(x)dx=C(b-a)$

פתרון:

f אינגרבילית בקטע ולכן $\int_a^b f(x)dx = lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$ כך שהביטוי שמימין הוא סכום רימן.

נבחר חלוקה ל־n קטעים שווי אורך כלומר אורך של כל קטע בחלוקה הינו $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ ונבחר x_i להיות נקודה רציונאלית של כל תת קטע בחלוקה (אפשר לעשות את זה בגלל תכונת הציפות של רצינאילית בממשיים).

$$\int_a^b f(x)dx = lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C\cdot\frac{b-a}{n} = C(b-a)$$

תרגיל 5

תהי f פונקציה רציפה ב־$[0,1]$ וגזירה ב־$(0,1)$ המקיימת $f(1)=1$, $f(0)=0$, וכאן $f(x)\le 3x^2$ לכל $0<x<1$.

הוכח כי $f(x)=x^3$.

פתרון:

נניח שלא, כלומר $f(x)\neq x^3$. אזי מרציפות של $f(x)$ קיים תת קטע של $[0,1]$ שנסמנו ב־$[x_1,x_2]$ ונניח ש־$f(x_1)=f(x_2)=0$.

נגדיר פונקציה $h(x)=f(x)-x^3$. היא מקיימת $h(x_1)=h(x_2)=0$. בנוסף לפי התרגיל שראינו הכיתה $h(x)<0$ לכל $x_1<x<x_2$.

לפי הנתון $h^{'}(x)=f^{'}(x)-3x^2\le 0$ כלומר $h(x)$ היא פונקציה יורדת בכל הקטע, בנוסף $h(x)$ מקיימת תנאי משפט רול ולכן קיימת נקודה x_3 שבה $h^{'}(x)=0$, כלומר קיימת נקודה שבה h מקבלת מינימום.

אנו נראה שבהכרח בסביבה ימנית של x_3 $h^{'}(x)>0$: אחרת נקבל ש־$h(x)$ היא פונקציה מונוטונית יורדת ולכן מקבלת את המינימום שלה ב־x_2, בנוסף $h(x_2)<h(x_3)<0$, וזו סתירה, ולכן בהכרח בסביבה ימנית פונקציה צריכה לעלות כדי לקבל 0 ב־x_2, כלומר בסביבה ימנית של x_3 הנגזרת של פונקציה היא חיובית ממש בסתירה לנתון.

תרגיל 6

נניח שהפונקציה $f(x)$ מוגדרת ורציפה בקטע סגור $[a,b]$. הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}[f(x)]^n$ מתכנס במ"ש ב־$[a,b]$ אם ורק אם הוא מתכנס נקודתית ב־$[a,b]$.

פתרון:

כיוון $\Leftarrow$

נניח שהטור מתכנס במ"ש ב-$[a,b]$ אזי ברור שהוא מתכנס נקודתית שם.

כיוון $\Rightarrow$

נניח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}[f(x)]^n$ מתכנס נקודתית ב-$[a,b]$.

צ"ל: הטור מתכנס במ"ש ב-$[a,b]$: נעשה הצבה: $t=f(x)$,

אזי נקבל טור חזקות : $\sum_{n=1}^{\infty}t^n$ והוא מתכנס כאשר $-1<t<1$ ולכן הוא מתכנס כאשר $-1<f(x)<1$, ובנוסף נתון שהוא מתכנס נקודתית בקטע $[a,b]$.

משום ש-f רציפה בקטע סגור אזי היא מקבלת בו את המינימום ואת המקסימום, ולכן $|f(x)|<M$ ולכן $|f(x)^n|\le|M|^n<1$, ולכן לפי מבחן ה-M של וירשטרס הוא מתכנס במ"ש ב-$[a,b]$.

תרגיל 7

נניח שהפונקציה $f(x)\ge 0$ מוגדרת ורציפה בקטע $[0,1]$, הוכיחו כי $f(x)=1$ אם ורק אם $lim_{n\to\infty}\int_0^1[f(x)]^n=1$.

פתרון:

כיוון$\Leftarrow$

אם $f(x)=1$ אזי $lim_{n\to\infty}\int_0^1 1dx=1$.

כיוון $\Rightarrow$

$$[f(x)]^n\to\begin{cases}1 & f(x)=1\\ 0 & 0\le f(x)<1\end{cases}$$

נניח ש-$f(x)\neq 1$ אזי $[f(x)]^n\to 0$, ולכן זו פונקציה חסומה ולכן קיים $M<1$ כך ש-$[f(x)]^n\le M^n$, ולכן

$0\le\int_0^1[f(x)]^n<\int_0^1 M^n=M^n\to 0$ ולכן לפי מבחן הסנדוויץ גם הפונקציה שלנו שואפת לאפס ולכן בכרח $f(x)=1$.

תרגיל 8

תהי $\{f_n\}$ סדרה של פונקציות גזירות ב-$[a,b]$ ו-f פונקציה גזירה ב-$[a,b]$ אף היא. הוכח או הפרך:

א) אם כך $f_n\to f$ במ"ש על $[a,b]$ אזי $f_n'(x)\to f'(x)$ לכל $x\in(a,b)$.

ב) אם $f_n'\to f'$ במ"ש על $[a,b]$ אזי $f_n(x)\to f(x)$ לכל $x\in(a,b)$.

פתרון:

א) הפרכה: $0 \to \frac{cos(nx)}{n} = f_n\left(x\right)$ על $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$0 = \frac{1}{n} \le_{n\to\infty} \left|\frac{cos(nx)}{n}\right| lim_{n\to\infty} sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}$

ולכן ההתכנסות היא במ"ש, אבל $-sin(nx) = -\frac{nsin(nx)}{n} = f_n^{'}\left(x\right)$

$0 \neq \frac{\sqrt{2}}{2} lim_{n\to\infty} \ge \left|-sup(nx)\right| lim_{n\to\infty} sup_{x\in[0,1]}$.

ב) הוכחה:

נתון: כי $f \to f_n^{'}$ על $[a,b]$, יהי $\epsilon > 0$ אזי מהתכנסות במ"ש של f_n קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$:

$\left|f_n^{'}\left(x\right) - f^{'}\left(x\right)\right| \le \frac{\epsilon}{b-a}$,

ולכן $f_n\left(x\right) = \int_a^t f_n^{'}\left(t\right)dt - \int_0^t f^{'}(t)dt$

$\left|f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right| = \left|\int_a^t f_n^{'}\left(t\right)dt - \int_a^t f^{'}(t)dt\right| = \left|\int_a^t \left(f_n^{'}\left(t\right) - f^{'}\left(t\right)\right)dt\right| \le$

$\le \int_a^t \left|f_n^{'}\left(t\right) - f(t)\right|dt \le \int_a^b \left|f_n^{'}\left(t\right) - f(t)\right|dt \le \frac{\epsilon(b-a)}{b-a} = \epsilon$

ולכן נבחר אותו n_0.

תרגיל 9

א) תהי $f_0\left(x\right)$ פונקציה רציפה ב־$[0,a]$ ונגדיר באינדוקציה סדרת פונקציות $\left\{f_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ בקטע $[0,a]$ ע"י $f_n\left(x\right) = \int_0^x f_{n-1}\left(t\right)dt$.

הוכח כי הסדרת מתכנסת במ"ש לפונקציה $f\left(x\right) = 0$ על $[0,a]$.

ב) תהי $f_0\left(x\right) = 1$(הפונקציה שווה זותית ל־1) ונגדיר באינדוקציה סדרת פונקציות $\left\{f_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ בקטע $[0,1]$ ע"י $f_n\left(x\right) = \sqrt{xf_{n-1}\left(x\right)}$

פתרון:

$f_1\left(x\right) = F\left(x\right) - F\left(0\right)$ ולכן $\left|f_1\left(x\right)\right| \le M$ כי פונקציה קדומה היא רציפה והקטע הוא סגור ולכן הי חסומה בו.

$\left|f_2\left(x\right)\right| = \left|\int_0^x f_1\left(x\right)dt\right| \le M\cdot x$

$\left|f_3\left(x\right)\right| = \left|\int_0^x f_2\left(t\right)dt\right| \le \int_0^x \left|f_2\left(t\right)dt\right| \le \int_0^x M\cdot\frac{t}{2}dt = \frac{Mx^2}{2}$

ולכן $\left|f_n\left(x\right)\right| \le \frac{M}{(n-1)!}x^{n-1}$

$0 \to \left|\frac{M}{(n-1)!}x^{n-1}\right| lim_{n\to\infty} sup_{x\in[0,a]} \ge \left|f_n\left(x\right)\right| lim_{n\to\infty} sup$.

ולכן $f_n\left(x\right) \to 0$ במ"ש.

ב)

תרגיל 10

יהיו $\{c_n\}$ המקיימים $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n = 1$

א) מצא תחום התכנסות של טור החזקות:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

ב) הוכח שהגבול $lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{xf'(x)}$ קיים אם ורק אם $c_0 = 0$ מה הם הערכים האפשריים של הגבול.

ג) הוכח שקיימת נגזרת של f שאינה מתאפסת ב־0 , כלומר הוכח שקיים $n > 0$ המקיים $f^{(n)}(0) \neq 0$.

פתרון:

א) הטור מתכנס כאשר $x = -1$ ולכן רדיוס ההתכנסות שלו הוא לפחות 1, מצד שני הטור מתבדר כאשר $x = 1$ ולכן רדיוס ההתכנסות שלו הוא לכל 1 ולכן רדיוס ההתכנסות הינו $R = 1$.

ולכן תחום ההתכנסות הוא $[-1, 1)$.

ג) ברור שקיים n_0 כך ש־$c_{n_0} \neq 0$, ולכן נגזור n_0 פעמים ונקבל :

$f^{n_0}(x) = c_{n_0}(n_0 - 1)! + c_{n_0+1} n_0! x + ...$, נציב בפונקציה $x = 0$ וסיימנו.

ב) כיוון $\Leftarrow$ נניח שהגבול קיים, מרצה להוכיח ש־$c_0 = 0$. נניח בשלילה ש־$c_0 \neq 0$ ולכן $lim_{x\to 0} \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ...}{c_1 x + c_2 2x^2 + ...}$ ולכן אם נוציא x מחוץ לסוגריים גם במונה וגם במכנה ונצמצם אזי נקבל שהגבול הוא ∞ ולכן הגבול לא קיים.

כיוון $\Rightarrow$

ברור שאם $c_0 = 0$ אזי אין מספר קבוע במונה ולכן אפשר לצמצם x ולקבל שהגבול הוא : $\frac{c_1}{c_1} = 1$, ואם גם $c_1 = 0$ אזי הגבול הוא $\frac{c_2}{2 \cdot c_2} = \frac{1}{2}$,

באופן כללי אם המקדים הראשון השונה מאפס הוא c_n אזי הגבול הוא $\frac{c_n}{n \cdot c_n} = \frac{1}{n}$

תרגיל 11

הוכח את אי שוויונות הבאים:

א) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{\pi}{2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+(n+1)^2}$

פתרון:

נשתמש במשפט מההרצאה: אם $f(x)$ אינטגרבילית ואי שלישית אזי :

$$\sum_{n=k+1}^{N} f(n) \le \int_k^N f(x)dx \le \sum_{n=k}^{N-1} f(n)$$

ואי שוויון עבור אינטגרל אינסופי:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} f(n) \le \int_k^{\infty} f(x)dx \le \sum_{n=k}^{\infty} f(n)$$

חזרה לתרגיל שלנו:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \le \int_0^k \frac{1}{1+x^2}dx \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

בביטוי מצד שמאל נעשה הזזת אינדקסים ונקבל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(n+1)^2} \le \frac{\pi}{2} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

ב) $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \le lnN \le \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}$

פתרון:

אותו פתרון כמו ב־א' עבור פונקציה $\frac{1}{x}$.

ג) הוכח :

$\gamma = \left[\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - lnN\right]$ $lim_{N\to\infty}$ קיים ו־$0 \le \gamma \le 1$

פתרון:

נשתמש בסעיף ב':
נראה קודם שהגבול בכלל קיים:
נגדיר סדרה $a_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - ln(N)$, הסדרה הזו היא מונוטונית וגם חסומה ולכן מתכנסת.
נוסף ונחסיר 1 מהצד השמאלי של הביטוי שקיבלנו בסעיף ב' ונוסיף ונחסיר $\frac{1}{N}$ מהצד הימני של אותו הביטוי:
$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - 1 = 1 - 1 + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{n} + \frac{1}{N} \le ln(N) \le \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{N}$\
נעביר $\frac{1}{N} \le \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - ln(N) \le 1$
ולכן $0 = lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \le lim_{N\to\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - ln(N)\right] \le lim_{N\to\infty} 1 = 1$
ולכן הגבול γ קיים ומקיים: $0 \le \gamma \le 1$.

תרגיל 12:

א)אם f אינטגרבילית על $[a,b]$ אזי הפונקציה $F(x) = \int_a^x$ רציפה על $[a,b]$.

ב) הוכח: אם f רציפה על $\mathbb{R}$ אזי הסדרה

$$f_n(x) = n\int_{t=0}^{t=\frac{1}{n}} f(x+t)dt$$

מתכנסת ל־f במ"ש על כל קטע סגור $[a,b]$.

פתרון:

נתון שפונקציה fרציפה ולכן לפי משפט הערך הממוצע קיים t_0 בקטע כך ש־

$|f_n(x) - f(x)| = |n\int_{t=0}^{t=\frac{1}{n}} f(x+t)dt - f(x)| = |nf(x+t_0)\cdot\frac{1}{n} - f(x)| = |f(x+t_0) - f(x)|$

ברור ש־$0 < t_0 < \frac{1}{n}$, כלומר t_0 תלוי ב־n ולכן $t_0 \to 0$ כאשר $n \to 0$, ולכן:

$lim_{n\to\infty} sup|f(x+t_0) - f(x)| = 0$ לכל $x \in [a,b]$.

תרגיל 13

נתון שלכל n מתקיים:

$$|\int_0^1 sin(nx)cos(583x)dx| \leq \frac{n+1}{583}$$

האם ניתן להחליף $sin(nx)$ בכל פונקציה f המקיימת:

$f(0) = 0$

$|f(1)| \leq 1$

$sup_{0\leq x\leq 1}|f^{'}(x)| \leq n$

פתרון:

נראה שכן אפשר:

תהי f פונקציה שמקיימת את תנאי השאלה ולכן:

$$\int_0^1 f(x)cos(583x)dx = \frac{f(x)sin(583x)}{583}|_0^1 - \int_0^1 \frac{f^{'}(x)sin(583x)}{583}dx = \frac{f(1)sin(583)}{583} - \int_0^1 \frac{f^{'}(x)sin(583x)}{583}$$

ולכן בערך מוחלט הביטוי הוא:

$$|\int_0^1 f(x)cos(583x)dx| = |\frac{f(1)sin(583)}{583} - \int_0^1 \frac{f^{'}(x)sin(583x)}{583}dx| \leq |\frac{f(1)sin(583)}{583}| + \int_0^1 |\frac{f^{'}(x)sin(583x)}{583}| \leq |\frac{f(1)}{583}| + \int_0^1 |\frac{f^{'}(x)}{583}| \leq \frac{1}{583} + \frac{n}{583} = \frac{n+1}{583}$$

כמו שרצינו.

תרגיל 14

הוכח שלכל $n > 0$,

$$|\int_0^1 sin^2(nx)cos(nx)dx| \leq \frac{1}{n}$$

הוכחה:

נעשה הצבה:

$t = sin(nx)$

$dt = ncos(nx)dx$

$$| \frac{1}{n} \int_0^1 t^2 dt| = |\frac{1}{n}\frac{t^3}{3}|_0^{sin(nx)}| = |\frac{1}{3n} \cdot sin^3(n)| \leq \frac{1}{n}$$