תרגיל בית 2 – טופולוגיה

<u>שאלה 1</u>

הוכיחו כי בכל מרחב מטרי (X,d) מתקיים:

1. $d(x_1,x_n)\le d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+\cdots+d(x_{n-1},x_n)$ לכל $n\ge 2$.
2. $|d(x,z)-d(y,z)|\le d(x,y)$.

<u>שאלה 2</u>

נסמן ב- X את אוסף כל הסדרות שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{1,2,\dots,n\}$. נגדיר את הפונקציה הבאה: $d:X\times X\to[0,\infty)$ על ידי:

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ \dfrac{1}{\min\left\{j\in\mathbb{N}:x_j\ne y_j\right\}} & x\ne y\end{cases}$$

הוכיחו כי d היא מטריקה על X.

<u>רמז:</u> הראו ש- $d(x,z)\le\max\left\{d(x,y),d(y,z)\right\}$.

<u>שאלה 3</u>

תהי $d:X\times X\to\mathbb{R}$ פונקציה המקיימת לכל $x,y,z\in X$:

1. $d(x,y)=0\iff x=y$
2. $d(y,x)\le d(z,y)+d(z,x)$

הוכיחו ש- d מגדירה מטריקה על X.

<u>שאלה 4</u>

הוכיחו או הפריכו: הפונקציות הבאות הן מטריקות.

1. $d((x,y),(x',y'))=\min\{|x-x'|,|y-y'|\}$ על $\mathbb{R}^2$

2. $d\left(\left(x,y\right),\left(x',y'\right)\right)=|x|+|y|+|x'|+|y'|$ על $\mathbb{R}^2$

3. $D\left(\left(x,y\right),\left(x',y'\right)\right)=d\left(x,x'\right)+d\left(y,y'\right)$ על $X\times X$, כאשר $\left(X,d\right)$ הוא מרחב מטרי.

<u>שאלה 5</u>

תזכורת: הגדרנו בכיתה את המטריקה ה p-adic באופן הבא: עבור $p\in\mathbb{N}$ ראשוני מגדירים מטריקה על $\mathbb{Z}$-

$$d_p\left(x,y\right)=\begin{cases}0 & x=y\\ \frac{1}{p^{k(x,y)}} & x\neq y\end{cases}$$, עבור $k\left(x,y\right)=\max\left\{i:p^i\mid\left(x-y\right)\right\}$.

א. הוכיחו ש $p^n\xrightarrow{d_p}0$.

ב. תארו את הכדור $B_{d_7}\left(3,\frac{1}{49}\right)$ במרחב $\left(\mathbb{Z},d_7\right)$.

ג. עבור $t\in\mathbb{Z}$ מצאו דוגמה לסדרה לא קבועה במרחב $\left(\mathbb{Z},d_3\right)$ המתכנסת ל- t.

ד. הוכיחו/הפריכו: הפונקציה $f\left(x\right)=x^5$ רציפה ב-$\left(\mathbb{Z},d_5\right)$.

<u>שאלה 6</u>

יהיו $x_1,x_2\in(X,d)$ ו- $r_1,r_2>0$ ויהיו $B\left(x_1,r_1\right),B\left(x_2,r_2\right)$ כדורים פתוחים שחיתוכם אינו ריק. תהי $p\in B\left(x_1,r_1\right)\cap B\left(x_2,r_2\right)$, ו -

$$r=\min\{r_1-d\left(p,x_1\right),r_2-d\left(p,x_2\right)\}$$

הוכיחו ש- $B\left(p,r\right)\subseteq B\left(x_1,r_1\right)\cap B\left(x_2,r_2\right)$.

<u>שאלה 7</u>

<u>הגדרה</u>: תהי $\{x_n\}$ סדרה במרחב מטרי כלשהו $\left(X,d\right)$. נאמר שהסדרה היא "קבועה לבסוף" אם קיים $x\in X$ כך שקיים $n_0\in\mathbb{N}$ עבורו לכל $n\geq n_0$ מתקיים $x_n=x$.

א. הוכיחו כי בכל מרחב מטרי, כל סדרה קבועה לבסוף מתכנסת.

ב. הוכיחו כי סדרה מתכנסת במרחב מטרי **דיסקרטי** אם ורק אם היא קבועה לבסוף.

ג. אפיינו את סדרות הקושי במרחב הדיסקרטי (כלומר, נסחו תנאי מספיק והכרחי להיות סדרה כלשהי סדרת קושי, והוכיחו תנאי זה!).

ד. הסיקו שכל מרחב דיסקרטי הוא שלם.

<u>שאלה 8</u>

במרחב ℓ_∞ הראו שהסדרה $x_n=\left(\frac{n+1}{n},\frac{n+2}{2n},\frac{n+3}{3n},...\right)$ מתכנסת, ומצאו את גבולה.

<u>שאלה 9</u>

א. הוכיחו את הטענה הכללית הבאה: יהי $\left(X,\sigma\right)$ מרחב מטרי, ויהי $\left(Y,\sigma_Y\right)$ תת מרחב מטרי שלו. תהי $\left\{x_n\right\}\subseteq Y$ ו- $y\in Y$. אזי $x_n\xrightarrow{\sigma_Y}y$ אמ"מ $x_n\xrightarrow{\sigma}y$.

נתבונן במרחב $\left\langle \mathrm{I},d\right\rangle$ כאשר I הוא קבוצת המספרים האי-רציונאליים, ו- d היא המטריקה הסטנדרטית המושרית מ- $\mathbb{R}$. נגדיר את הסדרה הבאה:

$$x_n=\frac{n+\sqrt{2}}{n-\sqrt{2}}.$$

ב. הוכיחו שהסדרה $\left\{x_n\right\}\subseteq \mathrm{I}$.

ג. הוכיחו שהסדרה אינה מתכנסת בתת המרחב המטרי $\left\langle \mathrm{I},d\right\rangle$.

<u>שאלת אתגר</u>

הראו שאם $(X,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי ו- d המטריקה המושרה מהנורמה אזי **לא** קיימים כדורים **שונים** $B(a_1,r_1),B(a_2,r_2)$ כאשר $r_1<r_2$ ו $B(a_1,r_1)\supset B(a_2,r_2)$.

בהצלחה!