מבוא לטופולוגיה – תרגיל 6 (פתרון , שאלות 4, 5)

<u>שאלה 4</u>

תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. הוכיחו ש*<u>הגרף של הפונקציה</u>*, זאת אמרת, הת-תמרחב של המשור האוקלידי $\mathbb{R}^2$ המוגדר על ידי נוסחה:

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = f(x)\}$$

הוא מרחב טופולוגי קשיר. (<u>רמז:</u> הוכיחו שפונקציה $(x \mapsto (x, f(x))$ רציפה.)

<u>הוכחה</u>

תהי $g: (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}^2, d_\infty)$ פונקציה כך ש- $\boldsymbol{g(x) = (x, f(x))}$ לכל $x \in \mathbb{R}$,

d מטריקה רגילה ב-$\mathbb{R}$ ו-d_∞ מטריקה ב-$\mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי הנוסחה:

$$d_\infty\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

(מטריקה הידועה מההרצאות ומהתרגולים).

<u>נוכיח ש-g רציפה בכל נקודה.</u>

יהי $a \in \mathbb{R}$ ו-$x_n \in \mathbb{R}$ - סדרה כך ש-$x_n \to a$. אזי $|x_n - a| = d(x_n, a) \to 0$.
כיוון ש-f רציפה אז $f(x_n) \to f(a)$ ולכן $|f(x_n) - f(a)| \to 0$.

מכאן:

$$d_\infty\Big((x_n, a), \big(f(x_n), f(a)\big)\Big) = \max\{|x_n - a|, |f(x_n) - f(a)|\} \to 0$$

ולכן $\big(x_n, f(x_n)\big) \to \big(a, f(a)\big)$ (ההרצאות) ואז g רציפה ב-a. לפי משפט אחד מההרצאות: g רציפה בכל $\mathbb{R}$.

<u>הערה.</u> הוכנו רציפות g ביחס למטריקה d_∞ במשור. אבל כידוע לנו המטריקה הזאת שקולה למטריקה אוקלידית ולכן g רציפה גם ביחס למטריקה אוקלידית במשור. (סוף הוכחת הרציפות).

עכשיו נשים לב ש- $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y=f(x)\}=\boldsymbol{g}(\mathbb{R})$.

כיוון ש- $\mathbb{R}$ מרחב קשיר אז גם G – כתמונה שלו תחת הפונקצי הרציפה g - קשורה (ההרצאה האחרונה), מש"ל.

שאלה 5

תהי X קבוצה אינסופית. תהי τ - קבוצת תת-קבוצות ב-X

כך ש-$\tau=\{U\subseteq X|\text{קבוצה סופית}-U^c\}\cup\{\emptyset\}$.

הוכיחו:

א) τ – טופולוגיה ב-X (עשינו את זה פעם בכיתה!)
ב) (X,τ) מרחב קשיר.

פתרון

א)

1. $\emptyset\in\tau$ לפי הגדרה. $X=\emptyset^c\in\tau$ כי $\emptyset$ קבוצה סופית.
2. יהי $U_\alpha\in\tau$ לכל $\alpha\in I$. אזי:
   $(\cup_{\alpha\in I}U_\alpha)^c=\cap_{\alpha\in I}U_\alpha^c$. כיוון שכל U_α^c קבוצות סופיות לפי ההגדרת τ, אז גם $(\cup_{\alpha\in I}U_\alpha)^c$ סופי ו-$\cup_{\alpha\in I}U_\alpha$ שייך ל $-\tau$.
3. יהי $U_n\in\tau$ לכל $1\le n\le K\in\mathbb{N}$. אזי:
   $(\cap_{1\le n\le K}U_n)^c=\cup_{1\le n\le K}U_n^c$. כיוון שכל U_α^c קבוצות סופיות לפי ההגדרת τ, אז גם $(\cap_{1\le n\le K}U_n)^c$ סופי ו-$\cap_{1\le n\le K}U_n$ שייך ל $-\tau$.
   אז הוכח ש-τ טופולוגיה. מש"ל.

ב) נניח – בשלילה ש-(X,τ) אינו קשיר. אזי קיימת קבוצה $U\subseteq X$ כך ש-

$U,U^c\neq\emptyset$ *(*)*
$U,U^c\in\tau$ *(**)*
$U\cup U^c=X$ *(***)*

אבל מ-*(**)* נובע ש-U,U^c קבוצות סופיות. לכן – בגלל (***) – גם X קבוצה סופית. סתירה. אז (X,τ) קשיר. מש"ל.