פתרון תרגיל בית 6 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1 (חימום)**.** מצאו איבר מסדר 30 בחבורה S_{10}.

פתרון. האיברים מסדר 30 בחבורה S_{10} הם בדיוק התמורות שניתן לרשום כמכפלה של מחזורים זרים מאורך 2, מאורך 3 ומאורך 5. למשל התמורה $(1,2)\,(3,4,5)\,(6,7,8,9,10)$.

שאלה 2. רמז: הסעיפים הבאים דורשים קצת קומבינטוריקה.

א. מצאו כמה איברים מסדר 6 יש בחבורה S_6.

ב. מצאו כמה איברים מסדר 2 יש בחבורה S_6.

פתרון. האם אתם יודעים מהו הקשר של (איחוד של) מחלקות צמידות לשאלה?

א. כל תמורה ניתן להציג כמכפלת מחזורים זרים, והסדר של התמורה יהיה הכמ"מ (lcm) של אורכי המחזורים בהצגה זו. הסבירו מדוע ב-S_6 ניתן לקבל כמ"מ 6 בשני אופנים בדיוק: מחזורים מאורך 6 $(a_1,\dots,a_6)$ שישנם $\binom{6}{6}(6-1)!=5!=120$ כאלו; ומכפלה של מחזור מאורך 3 עם חילוף $(a_1,a_2)\,(a_3,a_4,a_5)$ ויש $\binom{6}{2}\binom{6-2}{3}(3-1)!=120$ כאלו. בסך הכל יש 240 איברים מסדר 6.
ודאו שאתם מבינים את החישובים הקומבינטוריים לעיל ויודעים כיצד להגיע אליהם.

ב. באופן דומה לסעיף הקודם, כאן יהיו לנו שלושה סוגי איברים מסדר 2: חילופים, מכפלה של שני חילופים זרים ומכפלה של שלושה חילופים זרים. בסך הכל ישנם

$$\binom{6}{2}+\binom{6}{2}\binom{4}{2}\frac{1}{2!}+\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}\frac{1}{3!}=15+45+15=75$$

איברים מסדר 2 בחבורה S_6.

שאלה 3. לכל תמורה σ מהתמורות הבאות, כתבו את σ כמכפלת מחזורים זרים וחשבו את σ^2, את σ^{20} ואת $o(\sigma)$.

א. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\5&2&9&7&1&6&4&3&8\end{pmatrix}\in S_9$.

ב. $(1\ 2)\,(2\ 5\ 4)\,(3\ 1\ 4)\,(1\ 5)\in S_5$.

ג. $\sigma=\tau_1\tau_2^2\in S_4$, כאשר $\tau_1=(2\ 3\ 4)$ ו-$\tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$.

פתרון.

א. נסמן את התמורה הנתונה σ. מפרקים לפי הדרך שראינו בתרגול. מקבלים כי יש את המעגלים הבאים:

$$1 \mapsto 5 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 9 \mapsto 8 \mapsto 3,\ 4 \mapsto 7 \mapsto 4$$

לכן $\sigma = (1\ 5)\,(3\ 9\ 8)\,(4\ 7)$ (בנוסף 2 ו-6 נשלחים כל אחד לעצמו).
נחשב את σ^2 בעזרת העובדה שמחזורים זרים מתחלפים זה עם זה, ונקבל:

$$\sigma^2 = (1\ 5)^2\,(3\ 9\ 8)^2\,(4\ 7)^2 = (3\ 8\ 9)$$

הסדר של תמורה בהצגה כמכפלת מחזורים זרים היא הכמ"מ של אורכי המחזורים.
אצלנו $o(\sigma) = [2,3,2] = 6$. לכן $\sigma^6 = \mathrm{id}$. מכאן קל לחשב

$$\sigma^{20} = \left(\sigma^6\right)^3 \sigma^2 = \mathrm{id}^3 \cdot \sigma^2 = (3\ 8\ 9)$$

ב. נסמן את התמורה הנתונה σ. פה התמורה בכלל לא נתונה בצורה נוחה, ולכן נכתוב אותה כמטריצה:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן קל לראות שיש פה מעגל אחד, כלומר $\sigma = (1\ 4\ 3\ 2\ 5)$. נחשב את σ^2:

$$\sigma^2 = (1\ 4\ 3\ 2\ 5)^2 = (1\ 3\ 5\ 4\ 2)$$

סדר של מחזור הוא אורכו, ולכן $o(\sigma) = 5$. לכן $\sigma^5 = \mathrm{id}$ ונקבל $\sigma^{20} = \left(\sigma^5\right)^4 = \mathrm{id}$.

ג. מתקיים כי $\tau_2 = (1\ 2\ 4\ 3)$. כעת נחשב את σ:

$$\begin{aligned} \sigma &= \tau_1 \tau_2^2 \\ &= (2\ 3\ 4)\,(1\ 2\ 4\ 3)^2 \\ &= (2\ 3\ 4)\,(2\ 3)\,(1\ 4) \\ &= (2\ 4)\,(1\ 4) \\ &= (1\ 2\ 4) \end{aligned}$$

לכן $o(\sigma) = 3$ ובפרט $\sigma^3 = \mathrm{id}$. לבסוף:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= (1\ 2\ 4)^2 = (1\ 4\ 2) \\ \sigma^{10} &= \left(\sigma^3\right)^3 \sigma = \sigma = (1\ 2\ 4) \end{aligned}$$

שאלה 4. תהי $\sigma \in S_n$ תמורה, ויהי מחזור $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in S_n$. הוכיחו כי

$$\sigma a \sigma^{-1} = \sigma\,(a_1, a_2, \ldots, a_k)\,\sigma^{-1} = (\sigma\,(a_1)\,, \sigma\,(a_2)\,, \ldots, \sigma\,(a_k))$$

למשל, עבור $\sigma = (1\ 2)\,(4\ 5)$ ו-$a = (2\ 3\ 5\ 6)$ נקבל

$$\sigma\,(2\ 3\ 5\ 6)\,\sigma^{-1} = (1\ 3\ 4\ 6)$$

כרשות, האם אתם יכולים למצוא נוסחה עבור $\sigma a \sigma^{-1}$ כאשר a היא תמורה כלשהי?

פתרון. שיוויון בין שתי פונקציות, כמו למשל התמורות בשאלה, אפשר להוכיח על ידי זה שנראה שכל קלט נשלח לאותו פלט בשתי הפונקציות. כלומר נבדוק לאן האיברים ב-$\{1, 2, \ldots, n\}$ מועתקים בשתי התמורות.

ראשית, נניח כי $m = \sigma(a_i)$ עבור איזשהו $1 \leq i \leq k$. התמורה באגף ימין תשלח את m ל-$\sigma(a_{i+1})$ כאשר האינדקס $i+1$ מחושב מודולו k. נסתכל מה קורה באגף שמאל:

$$\begin{aligned}\left(\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_k)\sigma^{-1}\right)(m) &= \sigma\left((a_1, a_2, \ldots, a_k)\left(\sigma^{-1}(\sigma(a_i))\right)\right) \\ &= \sigma((a_1, a_2, \ldots, a_k)(a_i)) = \sigma(a_{i+1})\end{aligned}$$

ולכן התמורות פועלות אותו דבר על $\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_k)$. כעת נניח כי m אינו מהצורה $\sigma(a_i)$ לאף $1 \leq i \leq k$; לכן התמורה באגף ימין תשלח אותו לעצמו. לגבי אגף שמאל: נשים לב כי $\sigma^{-1}(m) \neq a_i$ לכל i, ולכן

$$\left(\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_k)\sigma^{-1}\right)(m) = \sigma\left((a_1, a_2, \ldots, a_k)\left(\sigma^{-1}(m)\right)\right) = \sigma\left(\sigma^{-1}(m)\right) = m$$

מכאן ששתי התמורות האלו שוות.

שאלה 5. נתבונן ב-S_n עבור $n > 2$.

א. הוכיחו שלכל מחזור $\mathrm{id} \neq \tau \in S_n$ קיימת תמורה $\sigma \in S_n$ כך ש-$\tau\sigma \neq \sigma\tau$. רמז: העזרו בשאלה הקודמת.

ב. הוכיחו כי $Z(S_n) = \{\mathrm{id}\}$.

פתרון.

א. נניח כי $\tau = (a_1, \ldots, a_k)$. נשים לב ש-$\tau\sigma = \sigma\tau$ אם ורק אם $\sigma\tau\sigma^{-1} \neq \tau$. אז בעזרת השאלה הקודמת, נוכל למצוא σ כדרוש.
אם האורך של המחזור $k \geq 3$, אז נבחר $\sigma = (a_1, a_2)$ ונקבל

$$\begin{aligned}(a_1, a_2)(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)(a_1, a_2)^{-1} &= (\sigma(a_1), \sigma(a_2), \sigma(a_3), \ldots, \sigma(a_k)) \\ &= (a_2, a_1, a_3, \ldots, a_k)\end{aligned}$$

מפני ש-τ שולח את a_1 ל-a_2 ואילו $\sigma\tau\sigma^{-1}$ שולח את a_1 ל-a_3, אז בודאי $\sigma\tau\sigma^{-1} \neq \tau$.
נותרנו עם המקרה שבו $k = 2$. כלומר $\tau = (a_1, a_2)$. מן הנתון $n > 2$, נסיק שקיים $b \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{a_1, a_2\}$. נבחר $\sigma = (a_1, b)$ ונחשב

$$(a_1, b)(a_1, a_2)(a_1, b)^{-1} = (\sigma(a_1), \sigma(a_2)) = (b, a_2)$$

מפני ש-τ שולח את a_2 ל-a_1 ואילו $\sigma\tau\sigma^{-1}$ שולח את a_2 ל-$a_1 \neq b$, אז בודאי $\sigma\tau\sigma^{-1} \neq \tau$.

ב. המרכז הוא תת־חבורה, ולכן תמיד כולל את איבר היחידה. כלומר $\mathrm{id} \in Z(S_n)$. נניח בשלילה שקיימת תמורה $\mathrm{id} \neq \sigma \in Z(S_n)$, ויהי $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_r$ פירוק שלה למכפלת מחזורים זרים.
אם $r = 1$, אז σ היא מחזור, וסיימנו לפי הסעיף הקודם שבו מצאנו תמורה שלא מתחלפת עם σ.
נניח $r > 1$ ושקיים בפירוק למחזורים זרים מחזור מאורך לפחות 3. בלי הגבלת הכלליות נניח σ_1 הוא מחזור מאורך $k \geq 3$ (כי מחזורים זרים מתחלפים, כלומר

$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$). נסמן $\sigma_1 = (a_1, \ldots, a_k)$. כמו בסעיף הקודם נבחר $\mu = (a_1, a_2)$, נשים לב כי μ מתחלף עם $\sigma_2, \ldots, \sigma_r$ ונחשב

$$\mu\sigma\mu^{-1} = \mu\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_r\mu^{-1} = \mu\sigma_1\mu^{-1}\sigma_2\ldots\sigma_r$$

נניח בשלילה כי $\mu\sigma\mu^{-1} = \sigma$, ונכפיל ב-$(\sigma_2\ldots\sigma_r)^{-1}$ מימין ונקבל $\sigma_1 = \mu\sigma_1\mu^{-1}$, בסתירה לסעיף הקודם.

נותרנו רק עם המקרה שבו בפירוק של σ למחזורים זרים מופיעים רק חילופים (מחזורים מאורך 2). נניח $\sigma_1 = (a_1, a_2)$ ו-$\sigma_2 = (b_1, b_2)$ עבור a_1, a_2, b_1, b_2 שונים (הבינו למה מקרה זה לא יקרה עבור $n = 3$). נבחר $\mu = (a_1, b_1)$ ונקבל

$$\mu\sigma\mu^{-1} = \mu\sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots\sigma_r\mu^{-1} = \mu\sigma_1\sigma_2\mu^{-1}\sigma_3\ldots\sigma_r$$

כי μ מתחלף עם $\sigma_3, \ldots, \sigma_r$. נניח בשלילה כי $\mu\sigma\mu^{-1} = \sigma$, ונכפיל ב-$(\sigma_3\ldots\sigma_r)^{-1}$ מימין ונקבל $\sigma_1\sigma_2 = \mu\sigma_1\sigma_2\mu^{-1}$, אבל

$$\mu\sigma_1\sigma_2\mu^{-1} = (a_1, b_1)(a_1, a_2)(b_1, b_2)(a_1, b_1) = (a_1, b_2)(a_2, b_1) \neq (a_1, a_2)(b_1, b_2)$$

וזו סתירה. בסך הכל קיבלנו כי $\sigma \notin Z(S_n)$. לכן $Z(S_n) = \{\mathrm{id}\}$.

שאלה 6. תהי $\pi = (1,2,3,4)(5,6,7)(8,9,10) \in S_{10}$. חשבו את סדר המְרַכֵּז $|C_{S_{10}}(\pi)|$.

פתרון. המרכז $C_{S_{10}}(\pi)$ הוא המייצב לגבי פעולת ההצמדה של S_{10} על עצמה. המסלול הוא מחלקת הצמידות של π, וידוע לנו כי

$$|\mathrm{conj}(\pi)| = [S_{10} : C_{S_{10}}(\pi)] = \frac{|S_{10}|}{|C_{S_{10}}(\pi)|}$$

ולכן מספיק לחשב כמה תמורות צמודות ל-π ב-S_{10}. אך מחלקות צמידות ב-S_n נקבעות לפי מבנה המחזורים. כמה מחזורים יש מן המבנה $(4,3,3)$? ודאו שאתם יודעים לפתור את השאלה הקומבינטורית הזו ולקבל:

$$\begin{aligned}|C_{S_{10}}(\pi)| = \frac{|S_{10}|}{|\mathrm{conj}(\pi)|} &= \frac{10!}{\binom{10}{4}(4-1)!\binom{10-4}{3}(3-1)!\binom{6-3}{3}(3-1)!\frac{1}{2!}} \\ &= \frac{10!}{\frac{10!}{4!6!}3!\frac{6!}{3!3!}2!\frac{3!}{3!0!}2!\frac{1}{2!}} = 72\end{aligned}$$

שאלות רשות

שאלה 7. כתבו תוכנה שמקבלת כקלט רשימת מספרים המייצגת תמורה, כלומר מקבלת את השורה השנייה בהצגת תמורה כמטריצה בגודל $2 \times n$. התוכנה תחזיר בפלט את התמורה כמכפלת מחזורים זרים. הרחיבו את התוכנה כך שתקבל כמה תמורות, ותחזיר את מכפלתן כמכפלת מחזורים זרים.

שאלה 8. תהי $\sigma \in S_n$ תמורה, ונגדיר את התומך של σ להיות

$$\mathrm{supp}(\sigma) = \{i \mid \sigma(i) \neq i\}$$

במילים אחרות, אלו הם המספרים ש-σ "מזיזה". נאמר ששתי תמורות σ ו-τ הן זרות אם

$$\mathrm{supp}(\sigma) \cap \mathrm{supp}(\tau) = \varnothing$$

הוכיחו כי אם שני מחזורים שאינם זרים מתחלפים זה עם זה, אז כל אחד מהם הוא חזקה של השני.

הדרכה: יהיו σ, τ שני מחזורים מתחלפים שאינם זרים. ראשית הראו כי $\mathrm{supp}(\sigma) = \mathrm{supp}(\tau)$. אפשר להניח ש-$\sigma = (1\ 2\ \ldots\ n)$, ו-$\tau(1) = 1 + k$. כעת הראו כי $\tau = \sigma^k$.

שאלה 9. תהינה תמורות $\sigma, \tau \in S_n$. הוכיחו שאם

$$|\mathrm{supp}(\sigma) \cap \mathrm{supp}(\tau)| = 1$$

אז $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ הוא מחזור מאורך 3.

רמז: הראו כי $\mathrm{supp}(\sigma^{-1}) = \mathrm{supp}(\sigma)$ לכל תמורה ובדקו לאן נשלח המספר ששייך לחיתוך התומכים.

שאלה 10. תהי G חבורה. נגדיר את המעריך של החבורה $\exp(G)$ (או האקספוננט) להיות המספר הטבעי הקטן ביותר n כך שלכל $g \in G$ מתקיים $g^n = e$. אם לא קיים כזה, נאמר $\exp(G) = \infty$.

כתבו תוכנה המחשבת את כל הסדרים האפשריים ב-S_n ואת $\exp(S_n)$. זה בסדר להשתמש במערכות תוכנה מתמטיות כמו SageMath.