אינדוקציה מתמטית

1. הוכח את הביטויים הבאים בעזרת אינדוקציה:

א. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+.....+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

ב. $1^2-2^2+3^2-4^2+.........+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$

ג. $1^2+2^2+3^2+4^2+.........+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$

ד. $1+2+4+8+...+2^{n-1}=2^n-1$

ה. $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

ו. $n+(n+1)+(n+2)+\cdots+3n=2n(2n+1)$

<u>פתרון</u>

א. נוכיח כי $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+.....+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

עבור $n=1$, נקבל $\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

נניח שהשוויון מתקיים עבור n: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+.....+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

נוכיח כי עבור n+1 מתקיים:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+.....+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}$$

אגף שמאל הנו בעצם

$$\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)},$$

ובצמצום נקבל בדיוק את אגף ימין הדרוש.

ב. נוכיח כי $1 -2^2+3^2-4^2+.........+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$.

עבור $n=1$, נקבל $1=1$.

נניח שהשוויון מתקיים עבור n: $1 -2^2+3^2-4^2+.........+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$.

נוכיח כי עבור n+1 מתקיים:

$$1^2-2^2+3^2-4^2+.........+(-1)^{n-1}n^2+(-1)^n(n+1)^2=(-1)^n\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

אגף שמאל הינו בעצם:

$$(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}+(-1)^n(n+1)^2=(-1)^{n-1}(n+1)[\frac{n}{2}+(-1)(n+1)]=$$
$$=(-1)^{n-1}(n+1)[\frac{-n-2}{2}]=(-1)^n(n+1)\frac{n+2}{2}$$

וקבלנו הדרוש.

ג. נוכיח כי $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$

עבור $n=1$ מקבלים: $1^2+2^2=5=\frac{1}{3}\cdot3\cdot5$.

נניח נכונות עבור n: $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$.

נוכיח שעבור $n+1$ מתקיים:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2(n+1))^2=\frac{n+1}{3}(2(n+1)+1)(4(n+1)+1)$$

נפתח מצד שמאל ונשתמש בהנחת האינדוקציה:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2(n+1))^2=$$
$$=1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2+(2n+1)^2+(2n+2)^2=$$
$$=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)+(2n+1)^2+(2n+2)^2=$$
$$=\frac{n}{3}(8n^2+6n+1)+4n^2+4n+1+4n^2+8n+4=$$
$$=\frac{8}{3}n^3+2n^2+\frac{1}{3}n+8n^2+12n+5=\frac{8}{3}n^3+10n^2+(12+\frac{1}{3})n+5=$$
$$=\left(\frac{n+1}{3}\right)(8n^2+22n+15)=\left(\frac{n+1}{3}\right)(2n+3)(4n+5)$$

ד. נוכיח כי $1+2+4+8+...+2^{n-1}=2^n-1$.

עבור $n=1$, נקבל $1=1$.

נניח שהשוויון מתקיים עבור n: $1+2+4+8+...+2^{n-1}=2^n-1$.

נוכיח כי עבור n+1 מתקיים:

$$1+2+4+8+...+2^{n-1}+2^n=2^{n+1}-1$$

על פי הנחת האינדוקציה, אגף שמאל הנו בעצם

$$2^n-1+2^n=2\cdot 2^n-1=2^{n+1}-1,$$

וקבלנו את אגף ימין הדרוש.

ה. נוכיח כי $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

עבור $n=1$, נקבל $1=1$.

נניח שהשוויון מתקיים עבור n: $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

נוכיח כי עבור n+1 מתקיים:

$$1+3+5+\cdots+(2n+1)=(n+1)^2$$

נפתח מצד שמאל ונשתמש בהנחת האינדוקציה:

$$1+3+5+\cdots+(2n+1)=\left(1+3+5+\cdots+(2n-1)\right)+(2n+1)=$$
$$=n^2+(2n+1)=(n+1)^2$$

ו. נוכיח כי $n+(n+1)+(n+2)+\cdots+3n=2n(2n+1)$.

עבור $n=1$, נקבל $1+2+3=6$.

נניח שהשוויון מתקיים עבור n: $n+(n+1)+(n+2)+\cdots+3n=2n(2n+1)$

נוכיח כי עבור n+1 מתקיים: $(n+1)+(n+2)+\cdots+3(n+1)=2(n+1)(2n+3)$

נפתח מצד שמאל ונשתמש בהנחת האינדוקציה:

$$\begin{aligned}
&(n+1)+(n+2)+\cdots+3(n+1)=\\
&=\left[(n+1)+(n+2)+\cdots+3n\right]+(3n+1)+(3n+2)+(3n+3)=\\
&=\left[2n(2n+1)-n\right]+(3n+1)+(3n+2)+(3n+3)=\\
&=2n^2+2n-n+9n+6=2n^2+10n+6=2(n^2+5n+3)=2(n+1)(n+2)
\end{aligned}$$

וקבלנו את אגף ימין הדרוש.

2. הוכיחו באינדוקציה עבור n טבעי זוגי

$$1^2-3^2+5^2-7^2+.....+(2n-3)^2-(2n-1)^2=-2n^2$$

<u>פתרון</u>

עבור $n=2$ אנו מקבלים: $1^2-3^2=-8=-2\cdot 2^2$

נניח כעת נכונות עבור n:

$$1^2-3^2+5^2-7^2+.....+(2n-3)^2-(2n-1)^2=-2n^2$$

ונוכיח ל-$n+2$ (כי אנו מוכיחים רק עבור n זוגי):

$$1^2-3^2+5^2-7^2+.....+(2(n+2)-3)^2-(2(n+2)-1)^2=-2(n+2)^2$$

נפתח את צד שמאל ונשתמש בהנחת האינדוקציה:

$$\begin{aligned}
&1^2-3^2+5^2-7^2+.....+(2n-3)^2-(2n-1)^2+(2(n+2)-3)^2-(2(n+2)-1)^2=\\
&=-2n^2+(2n+1)^2-(2n+3)^2=-2n^2+(4n^2+4n+1)-(4n^2+12n+9)=\\
&=-2n^2-8n-8=-2(n^2+4n+4)=-2(n+2)^2
\end{aligned}$$

3. מצא את ה- n הקטן ביותר שהחל ממנו אי השוויון מתקיים, והוכח אותו באינדוקציה:

$a.\quad 3n-1<2^n$

$b.\quad n^2+1<3^n$

$c.\quad 2n^3+1<4^n$

פתרון:

א. נבדוק עבור איזה n אי-שוויון זה מתחיל להתקיים: עבור $n=1,2,3$ הוא לא מתקיים, אבל עבור $n=4$ מקבלים: $11<16$ ולכן אי-השוויון מתקיים עבור $n\ge 4$.

נניח נכונות אי-השוויון עבור $n>3$: $3n-1<2^n$, ונוכיח ל-$n+1$: צריך להוכיח $3(n+1)-1<2^{n+1}$. נחשב ונשתמש בהנחת האינדוקציה:

$$3(n+1)-1=3n+3-1<2^n+3$$

יש להוכיח שהביטוי בצד ימין קטן מ-$2^{n+1}=2^n+2^n$, וזה תמיד מתקיים כי $3<2^n$ עבור $n\ge 2$ (שכן צד שמאל קבוע וצד ימין גדל).

ב. נוכיח כי $n^2+1<3^n$ **לכל** $n\ge 1$**.**

נשים לב, שכבר עבור $n=1$ אי השוויון מתקיים.

נניח שאי השוויון תקף עבור n: $n^2+1<3^n$, ונוכיח עבור n+1: $(n+1)^2+1<3^{n+1}$.

$$(n+1)^2+1=n^2+2n+2=(n^2+1)+(2n+1)\overset{?}{<}3\cdot 3^n=3^n+2\cdot 3^n.$$

לכן נותר להוכיח כי $2n+1<2\cdot 3^n$.

שוב לפי אינדוקציה, עבור n=1 אי השוויון מתקיים. נניח עבור n: $2n+1<2\cdot 3^n$, ונוכיח עבור n+1:

$$2(n+1)+1<2\cdot 3^{n+1}.$$

אבל

$$2(n+1)+1=(2n+1)+2<6\cdot 3^n=2\cdot 3^n+4\cdot 3^n.$$

על פי T_n, $2n+1<2\cdot 3^n$ ונותר להוכיח כי $2<4\cdot 3^n$. אך אי שוויון זה נכון תמיד (צד שמאל קבוע, וצד ימין רק גדל).

ג. נבדוק עבור איזה n אי-שוויון זה מתחיל להתקיים: עבור $n=1$ הוא מתקיים אך הוא לא מתקיים עבור $n=2$, ושוב חוזר ומתקיים עבור $n\ge 3$. עבור $n=3$, מתקיים: $55<64$.

נניח שאי השוויון מתקיים עבור n: $2n^3+1<4^n$, ונוכיח עבור n+1 $2(n+1)^3+1<4^{n+1}$:

$$2(n+1)^3+1=2n^3+6n^2+6n+2+1=(2n^3+1)+(6n^2+6n+2)\overset{?}{<}4^{n+1}=4^n+3\cdot 4^n$$

לכן נותר להוכיח כי: $6n^2+6n+2<3\cdot 4^n$.

שוב לפי אינדוקציה, עבור $n=3$, מתקיים: $74<192$. נניח עבור n: $6n^2+6n+2<3\cdot 4^n$, ונוכיח עבור $n+1$: $6(n+1)^2+6(n+1)+2<3\cdot 4^{n+1}$:

$$6(n+1)^2+6(n+1)+2=(6n^2+12n+6)+(6n+6)+2=$$
$$=(6n^2+6n+2)+(12n+12)\overset{?}{<}3\cdot 4^{n+1}=3\cdot 4^n+9\cdot 4^n$$

נותר אם כן להוכיח: $12n+12<9\cdot 4^n$ או לחלופין: $4n+4<3\cdot 4^n$. על פי ההנחה, $6n^2+6n+2<3\cdot 4^n$, ולכן מספיק לבדוק מתי מתקיים: $4n+4<6n^2+6n+2$. אי-שיוויון זה שקול ל- $6n^2+2n-2>0$. השורשים הם: $n_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+48}}{12}=\frac{-2\pm\sqrt{52}}{12}<1$, ולכן אי-שיוויון זה נכון לכל n טבעי, ומכאן שהוכחנו את טענתנו.

3. א. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי, $2^{n+1}+5^n$ מתחלק ב-3 ללא שארית.

ב. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי, 7^n-3^n מתחלק ב-4 ללא שארית.

פתרון:

א. עבור $n=1$, $2^{1+1}+5^1=9$ ובוודאי מתחלק ב-3 ללא שארית.

נניח נכונות ל- $n=k$, ז"א נניח ש- $2^{k+1}+5^k$ מתחלק ב-3, ונוכיח ש- $2^{k+2}+5^{k+1}$ מתחלק ב-5.

נחשב:

$$2^{k+2}+5^{k+1}=2\cdot 2^{k+1}+5\cdot 5^k=2\cdot 2^{k+1}+2\cdot 5^k+3\cdot 5^k=2(2^{k+1}+5^k)+3\cdot 5^k$$

הגורם השמאלי מתחלק ב-3 בגלל הנחת האינדוקציה, והגורם הימני מתחלק ב-3 כי הוא כפולה של 3, ולכן בסה"כ הראנו שהביטוי כולו מתחלק ב-3 ללא שארית כדרוש.

ב. עבור $n=1$, $7^1-3^1=4$ ובוודאי מתחלק ב-4 ללא שארית.

נניח נכונות ל- $n=k$, ז"א נניח ש- 7^k-3^k מתחלק ב-4, ונוכיח ש- $7^{k+1}-3^{k+1}$ מתחלק ב-4.

נחשב:

$$7^{k+1}-3^{k+1}=7\cdot 7^k-3\cdot 3^k=4\cdot 7^k+3\cdot 7^k-3\cdot 3^k=4\cdot 7^k+3\cdot(7^k-3^k)$$

הגורם השמאלי מתחלק ב-4 בגלל שהוא כפולה של 4, והגורם הימני מתחלק ב-4 בגלל הנחת האינדוקציה, ולכן בסה"כ הראנו שהביטוי כולו מתחלק ב-4 ללא שארית כדרוש.