תרגול 6- לכסון

הגדרה. נאמר שמטריצה Aלכסינה אם הוא דומה למטריצה אלכסונית.

משפט. אם A לכסינה אז $D = P^{-1}AP$ כאשר

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ו-

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | & & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_n \\ | & | & | & & | \end{pmatrix}$$

תרגיל. לכסן את המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

פתרון. בכדי ללכסן את המטריצה נמצא את הע"ע והו"ע

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)\lambda - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

לכן ע"ע הם $\lambda = -1, 2$. כעת נמצא את הו"ע

- $\lambda = -1$

$$V_{\lambda=-1} = N\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = Span\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

נבחר את הוע להיות $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\lambda = 2$

$$V_{\lambda=-1} = N\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = Span\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

נבחר את הוע להיות $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

מכאן לפי המשפט מתקיים

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל. חשבו את $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$

פתרון. כידוע

$$\begin{gathered} D = P^{-1}AP \\ \Downarrow \\ A = PDP^{-1} \\ \Downarrow \\ A^n = \left(PDP^{-1}\right)^n \\ \Downarrow \\ A^n = PD^nP^{-1} \\ \Downarrow \\ A^n = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ \Downarrow \\ A^n = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ \Downarrow \\ A^n = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 2^{n+1} \\ (-1)^n & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ \Downarrow \\ A^n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(-1)^{n+1} + \frac{1}{3}2^{n+1} & \frac{2}{3}(-1)^{n+1} + \frac{1}{3}2^{n+1} \\ -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n \end{pmatrix} \end{gathered}$$

משפט. התנאים הבאים שקולים

1. מטריצה A ניתנת ללכסון
2. p_A מתפרק לגורמים לינארים + לכל ע"ע הריבוי האלגבי שווה לריבוי הגאומטרים.
3. סכום הריבויים הגאומטרים שווה ל-n.

מסקנה. אם ל-A יש עע n שונים אז היא לכסינה

תרגיל. נגדיר את הסדרה הבאה:

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1} \end{cases}$$

כלומר $1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, \ldots$. מצא נוסחא כללית ל-$a_n$

פתרון. נשים לב שאת הנוסחא $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$ניתן לתרגום לכתיב של מטריצה באופן הבא

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

מכאן

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(-1)^{n+1} + \frac{1}{3}2^{n+1} & \frac{2}{3}(-1)^{n+1} + \frac{1}{3}2^{n+1} \\ -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(-1)^{n+1} + \frac{2}{3}2^{n+1} \\ \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n \end{pmatrix}$$

כלומר

$$a_n = \frac{1}{3}\left(-1\right)^n + \frac{2}{3}2^n$$

נבדוק

$$a_5 = \frac{1}{3}\left(-1\right)^5 + \frac{2}{3}2^5 = -\frac{1}{3} + \frac{64}{3} = 21$$