בוחן מבנים אלגבריים הנדסה תשעו

7/1/2016 כ"ו טבת

מתרגל: אחיה בר־און.

- ענה על 3 מתוך 4 שאלות.
- **על כל דף תשובה רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא.**
- הקפידו על סדר ניקיון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- נמקו היטב את תשובתכם.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- ניקוד: ניקוד שווה של $33\frac{1}{3}$ נקודות לכל שאלה. בכל שאלה הניקוד מתחלק שווה בשווה בין הסעיפים.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

1	
2	
3	
4	
total	

בהצלחה!

1. תהא G חבורה עם 2^{10} איברים. האם הפונקציה $\phi : G \to G$ המוגדרת ע"י $\phi(g) = g^2$ לכל $g \in G$ היא איזומורפיזם כאשר:

(א) החבורה G ציקלית.
פתרון: יהא g יוצר של G אזי $G = \langle g \rangle$. נניח בשלילה כי ϕ חח"ע ועל. אזי

$$G = Im(\phi) = \phi(G) = \phi(\langle g \rangle) = \langle \phi(g) \rangle = \left\langle g^2 \right\rangle$$

שזה גורר כי g^2 יוצר של G ג"כ. אבל $\left(g^2\right)^{2^9} = g^{|G|} = e$ ולכן הסדר $o(g^2) \leq 2^9$ בפרט הסדר לא שווה ל 2^{10} ו G אינה ציקלית.

(ב) החבורה G אינה חילופית.
פתרון: יהא $g, h \in G$ אם ϕהיא הומורפיזם אזי

$$\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$$

שזה

$$ghgh = gghh$$

נכפיל ב g^{-1}משמאל וב h^{-1} מימין ונקבל

$$hg = gh$$

כלומר G חילופית. סתירה.

תזכורת: איזומורפיזם = הומומורפיזים + חח"ע + על

2. תהא G חבורה בה קיימים שני איברים שונים מאיבר היחידה $e \neq g_1, g_2 \in G$ כך שהסדר של g_1 סופי והסדר של g_2 לא. כלומר $o(g_1) < \infty, o(g_2) = \infty$

(א) הוכח כי G אינה ציקלית
פתרון: נניח בשלילה כי G ציקלית. כלומר קיים $g \in G$ כך ש $\langle g \rangle = G$. אזי קיים $n \in \mathbb{N}$ טבעי כך ש $g^n = g_1$. נסמן את הסדר של g_1 ב k כלומר $o(g_1) = k$. מתקיים כי

$$g^{nk} = (g^n)^k = g_1^k = e$$

ולכן הסדר של gקטן שווה מ nk. כלומר הסדר של g סופי. אבל G היא אין סופית כי $\langle g_2 \rangle \subseteq G$ וב $\langle g_2 \rangle$ יש אין סוף איברים (כי $o(g_2) = \infty$) בפרט $\langle g \rangle$עם מספר סופי של איברים ולכן אינה יכולה להיות שווה ל G.

(ב) תן דוגמא מפורשת לחבורה G עם שני איברים g_1, g_2 כנתון בשאלה.
פתרון: למשל החבורה $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$. האיבר $g_1 = (0, 1)$ הוא מסדר 2 כי

$$g_1^2 = (0, 1) + (0, 1) = (0, 2) = (0, 0)$$

ו $(0, 0)$האיבר הנטרלי (ובנוסף $g_1 \neq (0, 0)$)
האיבר $g_2 = (1, 0)$ הוא מסדר אין סופי כי לכל $n \in \mathbb{N}$ טבעי מתקיים כי

$$g_2^n = (n, 0) \neq (0, 0)$$

3. הוכיחו את הבאים:

(א) תהא G חבורה. יהא $g \in G$ מסדר n ($n \in \mathbb{N}$ טבעי). יהיו $a, b \in \mathbb{N}$ כך ש $n = ab$ (כלומר פירוק של המספר n) . הוכח כי הסדר של g^a הוא b

פתרון : נתון כי $g^n = e$ ובנוסף, לכל $0 < m < n$ מתקיים $g^m \neq e$. נסמן $h = g^a$. צ"ל $o(h) = n$
מתקיים $h^b = (g^a)^b = g^{ab} = g^n = e$ ולכן $o(h) \leq n$. נניח בשלילה כי $m = o(h) < n$
אזי $e = h^m = (g^a)^m = g^{am}$ אבל $am < ab = n$ סתירה לנתון.

(ב) תהא G חבורה בת p^n איברים (כאשר $p \in \mathbb{N}$ מספר ראשוני ו $n \in \mathbb{N}$ מספר טבעי כלשהוא). הוכח כי קיים $g \in G$ מסדר p.

פתרון : נוכיח באינדוקציה. עבור $n = 1$. יש p איברים ואז לפי משפט מההרצאה קיים לה יוצר והוא מסדר p.

כעת נניח שלכל חבורה מסדר p^m $0 < m < n$ קיים איבר מסדר p. נוכיח כי גם לחבורה בסדר p^n יש איבר מסדר p.

יהא $e \neq g \in G$ אזי הסדר שלו מחלק את p^n. אם הסדר שלו הוא p^n אזי לפי התרגיל הקודם $h = g^{p^{n-1}}$ מסדר p.

אחרת הסדר שלו p^m כאשר $0 < m < n$ ולכן סדר החבורה $\langle g \rangle$ הוא p^m לפי הנחת האינדוקציה יש $h \in \langle g \rangle$מסדר p. $h \in G$ מסדר p.

4. הוכח/הפרך כי H היא ת"ח של G במקרים הבאים

(א) החבורה $G = (\mathbb{F}^{n \times n}, +)$ ו $H = \{A \in \mathbb{F}^{n \times n} \mid |A| \neq 0\} \subseteq G$ (כאשר $|A|$ פירוש הדטר' של A)

פתרון : לא ת"ח כי $I, -I \in H$ אבל $I - I = 0 \notin H$

(ב) תהא G חבורה חילופית ו $n \in \mathbb{N}$. $H = \{g^n | g \in G\} \subseteq G$

פתרון : ת"ח כי אם $g_1^n, g_2^n \in H$ אזי $\left(g_1 g_2^{-1}\right)^n \in H$ $= g_1^n \left(g_2^{-1}\right)^n$ $= g_1^n \left(g_2^n\right)^{-1}$ כאשר המעבר האחרון נכון בגלל ש H חילופית. בנוסף $e^n = e \in H$

(ג) החבורה $G = (\mathbb{Z}_4, +)$ ו- $H = \{x^2 | x \in \mathbb{Z}_4\} \subseteq G$ (כאשר x^2 פירוש x כפול x מודולו 4)

פתרון : נחשב מפורש $0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 0, 3^2 = 1$ ולכן

$$H = \{0, 1\}$$

ולכן H אינה תת חבורה כי $1 + 1 = 2 \notin H$ ואין סגירות לחיבור

(ד) החבורה $G = (\mathbb{Z}_5, +)$ ו - $H = \{x^3 | x \in \mathbb{Z}_5\} \subseteq H$ (כאשר x^3 פירוש x בחזקת 3 מודולו 5)

פתרון : נחשב מפורש $0^3 = 0, 1^3 = 1, 2^3 = 3, 3^3 = 2, 4^3 = 4$ ולכן

$$H = \{0, 1, 3, 2, 4\}$$

כלומר H שווה לכל $\mathbb{Z}_5$ ולכן תת חבורה.