מבוא לטופולוגיה - תרגיל 12

שאלה 1

יהי (M_2, d_2) , (M_1, d_1) מרחבים מטריים.
ראינו בכיתה שהפונקציה $d: M_1 \times M_2 \to \mathbb{R}$
המוגדרת על ידי נוסחה:

$$d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$$

מקיימת אקסיומות מטריקה ולכן מאפשרת לראות $(M_1 \times M_2, d)$ כמרחב מטרי.
נסמן ב-τ את הטופולוגיה המושרת בקבוצה $M_1 \times M_2$ על ידי המטרוקה d. הבסיס הטבעי $\mathfrak{B}$ של הטופולוגיה הזאת מורכב מכדורים:

$$\mathfrak{B} = \big\{B\big((a_1, a_2), r\big) | a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, r > 0\big\}$$

נסמן ב-$\tau_\times$ טופולוגית המכפלה במרכב $(M_1, d_1) \times (M_2, d_2)$. אחד מהבסיסים הקיימים לטופולוגיה הזאת מורכב ממכפלות:

$$\boldsymbol{\mathfrak{B}_\times = \{B_1(a_1, r_1) \times B_2(a_2, r_2) | a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, r_1, r_2 > 0\}}$$

(כאן $B_1(a_1, r_1), B_2(a_2, r_2)$ כדורים במטריקות d_1, d_2 בהתאם.)
בהשתמש את שני הבסיסים. <u>הוכיחו</u> ש-$\tau = \tau_\times$.

שאלה 2

יהיו Y, X מ"ט ותהי $f: X \to Y$ פונקציה רציפה .הגרף של f הוא תת-מרחב של $X \times Y$ המוגדר באופן הבא: $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y\}$.

הכיחו ש-X הומאומורפי ל- Γ_f .

שאלה 3

יהיו Y, X מרחבים טופולוגיים ו-Y - מרחב קומפקטי.

א) הוכיחו שההטעלה p_X היא פונקציה סגורה.

ב) תהי $f: X \to Y$ פונקציה. הוכיחו שאם הגרף $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y\}$ קבוצה סגורה ב-$X \times Y$, אזי f פונקציה רציפה.

שאלה 4

יהיו $X_1, \dots, X_n$ מ"ט קומפקטיים.

הוכיחו שהמרחב $X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$ קומפקטי.

<u>שאלה 5</u>

יהיו X,Y,Z מרחבים טופולוגיים. נגדיר יחס '~' על מרחב המכפלה $X\times Y\times Z$ כך ש- $(x,y,z)\sim(x',y',z') \Leftrightarrow x=x' \wedge z=z'$.

<u>הוכיחו:</u>

א) '~' יחס שקילות;

ב) $(X\times Y\times Z)/\sim$ הומאומורפי ל-$X\times Z$.