תרגיל 2

1. יהיו R,S חוגים עם יחידה ו$\varphi : R \to S$ הומומורפיזם של חוגים עם יחידה. הוכיחו את הטענות הבאות:
   (א) לכל $x \in R$, $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.
   (ב) אם $x \in R$ הפיך, אז $\varphi(x)$ הפיך, וכן $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.
   (ג) אם $x \in R$ נלפוטנט, אז $\varphi(x)$ נלפוטנט.
   (ד) אם φ אפימורפיזם, אז $\varphi[Z(R)] \subseteq Z(S)$.
   פתרון:
   i. $0 = \varphi(0) = \varphi(x+(-x)) = \varphi(x) + \varphi(-x)$. לכן $\varphi(x) = -\varphi(x)$.
   ii. $1 = \varphi(1) = \varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(x) \cdot \varphi(x^{-1})$. לכן $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.
   iii. קיים n כך ש$x^n = 0$. $\varphi(x)^n = \varphi(x^n) = \varphi(0) = 0$.
   iv. יהי $x \in Z(R)$ ו$y \in S$. קיים $a \in R$ כך ש$y = \varphi(a)$. $\varphi(x)y = \varphi(x)\varphi(a) = \varphi(xa) = \varphi(ax) = \varphi(a)\varphi(x) = y\varphi(x)$.

2. מצאו את כל ההומומורפיזמים (של חוגים עם יחידה) מ$\mathbb{Q}$ לעצמו.
   פתרון:

יהי $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ הומומורפיזם. מתקיים $\varphi(1) = 1$. מכאן לכל $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) = \varphi(1+...+1) = \varphi(1)+...+\varphi(1) = 1+...+1 = n$. מהסעיף הראשון של התרגיל הקודם נקבל גם: $\varphi(-n) = -n$. כעת, מהסעיף השני של תרגיל 1, נקבל שלכל $0 \neq n \in \mathbb{Z}$, $\varphi(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ ת ולבסוף מהחיבוריות נקבל $\varphi(\frac{m}{n}) = \varphi(\frac{1}{n})+...+\varphi(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}+...+\frac{1}{n} = \frac{m}{n}$. כלומר, ההומומורפיזם היחיד מ$\mathbb{Q}$ לעצמו זה הזהות.

3. נסמן $R = M_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
מצאו כמה הומומורפיזמים של חוגים $\psi \colon \mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}] \to R$ ישנם. רמז: הפתרון תלוי רק בתמונה $\psi(\sqrt[3]{2})$.
פתרון:

ראשית, $\psi(1) = 1$. מכאן שלכל $n \in \mathbb{Z}$, $\psi(n) = \begin{pmatrix} n \mod 2 & \\ & n \mod 2 \end{pmatrix}$. בפרט, $\psi(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. מכפליות, צריך להתקיים ש$\psi(\sqrt[3]{2})^3 = \psi((\sqrt[3]{2})^3) = \psi(2) = 0$.
מבדיקה ידנית (בחוג יש בסה"כ 16 איברים) מגלים שהאיברים היחידים שמקיימי תנאי זה הם: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. לאחר שקובעים לאן כל איבר ב$\mathbb{Z}$ הולך ולאן $\sqrt[3]{2}$ הולך, כל שאר האיברים נקבעים אוטומטית ע"י כפליות וחיבוריות.
לסיכום: יש 4 הומומורפיזמים.

4. יהיו $\{S,R_i\}_{i\in I}$ חוגים עם יחידה. תזכורת $\Pi_{i\in I}R_i=\{(a_i)_{i\in I}|\forall i\in I, a_i\in R_i\}$

(א) נגדיר $\pi_i:\Pi_{i\in I}R_i\to R_i$ ע"י $\pi_i(a_j)=a_i$. (הטלה על הרכיב הi). הוכיחו שזהו אפימורפיזם.

(ב) תהי $\varphi:S\to\Pi_{i\in I}R_i$ העתקה. הוכיחו שφ הומומורפיזם אמ"ם לכל i, $\pi_i\circ\varphi:S\to R_i$ הומומורפיזם.

(ג) תנו דוגמא לשני חוגים עם יחידה, A,B כך שקיים הומומורפיזם של חוגים בלי יחידה $\varphi:A\to B$, ואין הומורפיזם של חוגים עם יחידה $\psi:A\to B$.

פתרון:

i. ראשית, נוכיח שההעתקה על: יהי $a\in R_i$. אפשר לקחת כמקור שלו את הוקטור שברכיב הi יש a, ובכל שאר הרכיבים יש 0.
נוכיח ש1 הולך ל1: איבר היחידה של המכפלה הוא הוקטור שבו בכל הרכיבים יש 1. לכן ההטלה שלו על כל רכיב היא 1.
ההטלה שומרת חיבור וכפל מכיוון שהפעולות בחוג המכפלה הן רכיב-רכיב.

ii. $\Leftarrow$ הרכבה של הומומורפיזמים היא הומומורפיזם.
$\Rightarrow$ נוכיח שφ הומו'. ראשית, בכל רכיב $\pi_i(\varphi(1))=1$. כלומר, $\varphi(1)$ הוא וקטור שבכל רכיב שווה ל1. לכן הוא איבר היחידה.
כעת, יהיו $a,b\in S$. $\varphi(a)=(a_i),\varphi(b)=(b_i),\varphi(ab)=(c_i),\varphi(a+b)=(d_i)$. לכל j, $\pi_j(\varphi(a))=a_j,\pi_j(\varphi(b))=b_j,\pi_j(\varphi(ab))=c_j\pi_j(\varphi(a+b))=d_j$. מכיוון ש$\pi_j\circ\varphi$ הומומורפיזם, מתקיים: $a_jb_j=c_j,a_j+b_j=d_j$.
מכיוון שהפעולות בחוג מכפלה הן רכיב רכיב, נקבל: $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b),\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$.

iii. ראשית, נמצא שני חוגים S,R שאין בינהם הומומורפיזם של חוגים עם יחידה. ניתן לבחור למשל $R=\mathbb{Z}$, $S=\mathbb{Q}$. כל הומומורפיזם מS לR חייב להיות הומומורפיזם ה0. הסבר: 1 חייב ללכת ל0 או 1, כי הוא אידמפוטנט. אם 1 הולך ל0, אז זהו הומומורפיזם ה0. אחרת, $1\to 1$. ואז $2\to 2$. אבל איבר הפיך חייב ללכת לאיבר הפיך, לפי תרגיל 1. ואילו ב$\mathbb{Z}$ 2 אינו הפיך. כעת, נשים לב שבין כל שני חוגים קיים הומו' של חוגים בלי יחידה- הומו' ה0.

5. יהי R חוג. הוכיחו $I=\{f\in R[x]|f(212)=0\}\lhd R[x]$.

פתרון:

מלינארית 1 אתם יודעים שזה תת מרחב. נוכיח בליעה: יהיו $f\in I,g\in R[x]$. $(gf)(212)=g(212)f(212)=g(212)\cdot 0=0$. לכן $gf\in I$.

6. בכל סעיף, קבעו האם I אידיאל של R. במידה ולא, האם הוא אידיאל ימני? שמאלי?

(א) $R=\mathbb{R}[x],I=\mathbb{R}_n[x]$ (כל הפולינומים עד דרגה n).

(ב) $R=M_2(\mathbb{Z}).I=\begin{pmatrix}2\mathbb{Z}&4\mathbb{Z}\\2\mathbb{Z}&4\mathbb{Z}\end{pmatrix}$

(ג) $R=\begin{pmatrix}*&*\\0&*\end{pmatrix},I=\begin{pmatrix}0&*\\0&0\end{pmatrix}$ (מטריצות משולשיות עליונות מעל חוג נתון)

פתרון:

i. לא אידיאל, ומכיוון שהחוג לא קומוטטיבי אז הוא גם לא אידיאל ימני/שמאלי).
הסיבה: אין "בליעה". למשל, $x^n\in I$, $x\in R$, אבל $x\cdot x^n=x^{n+1}\notin I$.

ii. קל לראות שזאת חבורה חיבורית. נוכיח שיש בליעה משמאל ולא מימין, ולכן זהו אידיאל שמאלי. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2a' & 4b' \\ 2c' & 4d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a'a+2bc' & 4b'a+4b'd \\ 2a'c+2c'd & 4b'c+4d'b \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z} & 4\mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & 4\mathbb{Z} \end{pmatrix} = I$.

מצד שני, $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in I$ ו$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in R$, אבל $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \notin I$.

iii. ראשית, קל לראות שI חבורה חיבורית. כעת נראה שיש בליעה משני הכיוונים. $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ad \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$. $\begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & dc \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$.

7. יהיו $\{R_i\}_{i\in I}$ חוגים עם יחידה.

(א) יהיו $I_i \trianglelefteq R_i$. הוכיחו: $\Pi I_i \trianglelefteq R_i$.

(ב) הוכיחו/הפריכו: כל אידיאל של המכפלה האינסופית ΠR_i הוא מהצורה ΠI_i עבור $I_i \trianglelefteq R_i$?

פתרון:

i. מתורת החבורות אנחנו כבר יודעים שמכפלה של חבורות היא חבורה, ולכן ΠI_i היא חבורה חיבורית. נוכיח בליעה. יהיו $(a_i) \in \Pi I_i$, $(x_i) \in \Pi R_i$. $(x_i)(a_i) = (x_i a_i) \in \Pi I_i$ בגלל שיש בליעה בכל רכיב. כנ"ל לגבי כפל מצד שני.

ii. הפרכה: נקח את I להיות אוסף כל הסדרות המתאפסות לבסוף. כלומר, פרט למס' סופי של מקומות, כל הרכיבים שווים ל0. קל לראות שזהו אכן אידיאל, והוא לא שווה למכפלה של אידיאלים.

8. תהי X קבוצה. הזכרו ש-$(P(X), \triangle, \cap)$ הוא חוג חילופי. תהי $\varnothing \neq I \subseteq P(X)$ תת־קבוצה לא ריקה.

(א) נאמר ש-τ סגורה לאיחוד אם $A, B \in I$ גורר $A \cup B \in \tau$. נאמר ש-τ סגורה להכלה אם $A \subseteq B \in \tau$ גורר $A \in I$. הוכיחו כי τ אידאל אם ורק אם I סגורה לאיחוד והכלה.

(ב) נניח ש-X סופית. הוכיחו ש-I אידאל אם רק אם קיים $C \subseteq X$ כך ש-$\tau = P(C)$.

(ג) מצאו אידאל I של $(P(\mathbb{N}), \triangle, \cap)$ שאינו מן הצורה $P(C)$.

פתרון:

i. ראשית, נניח שI אידיאל. יהי $B \in I$ ו$A \subseteq B$. אזי $A = A \cap B \in I$, כי I מקיים "בליעה".

כעת, יהיו $A, B \in I$. הוכחנו כבר סגירות להכלה, ולכן $B \setminus A \in I$. I הוא אידיאל ולכן סגור לחיבור. מכאן ש$A \cup B = A \triangle (B \setminus A) \in I$. מש"ל.

לכיוון השני, נניח שI מקיים סגירות לאיחוד והכלה. נוכיח שI אידיאל. ראשית, מסגירות להכלה,ברור ש$\emptyset \in I$. כמו כן, לכלכ איבר בI, גם הנגדי שלו בI, כי כל איבר הוא הנגדי של עצמו. יהיו $A, B \in I$. מסגירות לאיחוד, $A \cup B \in I$. מסגירות להכלה $A \triangle B \subseteq A \cup B$ ולכן $A \triangle B \in I$. כלומר, הוכחנו שI חבורה

חיבורית. כעת נוכיח בליעה. יהיו $A \in I$, $B \in P(X)$. $B \cap A \subseteq A$ ולכן מסגירות להכלה, $B \cap A \in I$. מש"ל.

ii. ראשית, ברור שלכל $C \subseteq X$, $P(C)$ סגורה לאיחוד והכלה ולכן אידיאל. כעת, יהי $I \trianglelefteq P(X)$. בI יש מס' סופי של איברים כי $P(X)$ סופית. נסמן בC את איחוד כל הקבוצות בI. $C \in I$, כי באינדוקציה ניתן להראות שI סגור לכל מס' סופי של איחודים. מהגדרת C, ברור שכל איבר בI מוכל בC, ולכן $I \subseteq P(C)$. מצד שני, I סגור להכלות, ולכן $P(C) \subseteq I$. מש"ל.

iii. ניקח את I להיות האוסף של כל תת הקבוצות הסופיות של $\mathbb{N}$. קל לראות שהוא סגור לאיחוד והכלה, ולכן אידאל. כמו כן, קל לראות שהוא לא שווה לקבוצת החזקה של שום קבוצה.

9. יהי R חוג ו$I, J \trianglelefteq R$. הוכיחו: $I \cup J \trianglelefteq R$ אמ"ם $I \subseteq J \vee J \subseteq I$.

פתרון:

נניח בשלילה ש $I \cup J$ אידיאל, וגם $I \not\subseteq J \wedge J \subsetneq I$. לכן קיימים $x \in I \setminus J, y \in J \setminus I$. $I \cup J$ אידאל, ולכן $x + y \in I \cup J$. אם $x + y \in I$, אז $y = (x + y) - y \in I$. סתירה. המקרה השני זהה.