אינפי 1 - תרגיל 4

1. הוכח: $\overline{\lim}a_n = -\underline{\lim}(-a_n)$. רמז: שאלה 7 בתרגיל 2, והגדרת ה $\overline{\lim}$ ו $\underline{\lim}$

2. תרגיל מודרך. תהי סדרה $\{a_n\}$ כך ש $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > 0$, ו- $\overline{\lim}a_n \cdot \overline{\lim}\frac{1}{a_n} = 1$ הוכח ש $\{a_n\}$ מתכנסת.
   a. הוכח ש $\overline{\lim}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\underline{\lim}a_n}$ בעזרת שאלה 8 מתרגיל 2
   b. הוכח שלכל סדרה $\{b_n\}$, אם $\overline{\lim}b_n = \underline{\lim}b_n = L$ אזי $\lim b_n = L$. רמז: הנח את שלילת הגבול, והמשך עד שתגיע לסתירה.
   c. הסק ש $\{a_n\}$ מתכנסת (על הכתב, לא בראש...)

3. חשב את גבול הסדרות:
   a. $a_n = \left(\frac{n^2-2}{n^2-3}\right)^{4n^2-1}$
   b. $a_n = \left(\frac{2n^3-1}{2n^3+3}\right)^{3n^3+4}$

4. נתונות שתי סדרות $\{a_n\}$ ו $\{b_n\}$, נתון שהסדרה $\{a_n+b_n\}$ חסומה, ונתון $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.
   מצא את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

5. הוכח שאם $\{a_n\}$ מתכנסת ו $\{b_n\}$ חסומה אזי $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n+b_n) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$

6. תהי $\{a_n\}$ סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $\begin{cases} a_{2n} = \frac{a_{2n-1}}{2} \\ a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n} \end{cases}$. מצא את הגבולות החלקיים של $\{a_n\}$. (רמז: מצא את האיברים של $\{a_n\}$ כפונקציה של n - הוכח באמצעות אינדוקציה).

7. תהי $\{a_n\}$ סדרה שאינה חסומה מלעיל. הוכח/הפרך:
   a. $\{a_n\}$ שואפת לאינסוף
   b. ל $\{a_n\}$ יש תת סדרה ששואפת לאינסוף

8. תהי $\{a_n\}$ סדרה חסומה. הוכח כי ל $\{a_n\}$ יש בהכרח תת סדרה מונוטונית.