

תרגיל 4 בפונקציות מרוכבות

שאלות להגשה

1. מצאו פונקציה $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ שגזירה אך ורק בנקודות $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$.
רמז: אם $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ אפשר לנסות לחפש u, v מהצורה

$$u(x, y) = u_1(x) + u_2(y), \quad v(x, y) = v_1(x) + v_2(y)$$

2. נניח כי $f(z)$ גזירה בעיגול $\{z \mid |z| < R\}$ הוכיחו כי גם $\overline{f(\bar{z})}$ גזירה שם.

3. עבור הפונקציות $u(x, y)$ הבאות, מצאו $v(x, y)$ כך שהפונקציה

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

תהיה גזירה בתחום הנתון. בטאו את f לפי z (יוצא משהו פשוט).

(א) $u(x, y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y$ בכל $\mathbb{C}$.

(ב) $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} + x$ ב $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

4. הוכיחו כי

(א) לכל z מתקיים $|e^z| \leq e^{|z|}$

(ב) מתקיים שוויון אם ורק אם z ממשי אי שלילי.

5. מצאו את כל הנקודות בהן $\cos \bar{z}$ גזירה.

6. מצאו נוסחא רב ערכית עבור $\arctan z$. (כלומר, בהינתן $w = \tan z$ בטאו את z באמצעות w , מותר להשתמש בפונקציות רב ערכיות).

7. יהי Log הענף העיקרי של הלוגריתם בתחום $\mathbb{C} \setminus \{-t \mid t \geq 0\}$.

(א) הראו כי לכל z בתחום ההגדרה של Log מתקיים

$$\text{Log} \frac{1}{z} = -\text{Log} z$$

(ב) הראו שכלל זה לא בהכרח נכון עבור ענפים אחרים של הלוגריתם.

תרגילים לא להגשה. מומלץ לעשות וזה יכול להיות גם הכנה טובה לבוחן.

1. מצאו את כל הנקודות שבהן הפונקציות הבאות גזירות/אנליטיות:

(א) $f(z) = x^3 + iy^3$

(ב) $f(z) = z + \text{Re}(z)$

(ג) $f(z) = x^3 + y^5$

2. מצאו את כל הנקודות $z \in \mathbb{C}$ שבהן $f(z) = \bar{z}e^{-17z^2}$ גזירה.

3. תהי $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות ונגדיר $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ לפי

$$f(z) = u(x+y) - iu(x-y)$$

הוכיחו כי f גזירה על הציר הממשי (ציר x)

4. תהי $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ פונקציה הגזירה בכל נקודה ב $\mathbb{C}$ המקיימת כי בכל נקודה

$$u^2 - v^2 = c$$

כאשר c קבוע כלשהוא, הוכיחו כי f קבועה.

$$g(z) = (f(z))^2$$

רמז: הגדירו

5. תהיינה שתי פונקציות

$$f_1(x, y) = u(x, y) + iv_1(x, y)$$

$$f_2(x, y) = u(x, y) + iv_2(x, y)$$

המוגדרות וגזירות בתחום D . הוכיחו כי $v_1 - v_2$ הוא מספר קבוע.

6. הביאו את המספרים הבאים לצורה קרטזית

$$\sin(i) \quad (\text{א})$$

$$\cos(-i) \quad (\text{ב})$$

$$\tan(1+i) \quad (\text{ג})$$

7. מצאו את כל הערכים האפשריים של הביטויים הבאים:

$$(1+i)^{2i} \quad (\text{א})$$

$$(-i)^{-i} \quad (\text{ב})$$

$$\operatorname{Im}((1-i)^{1+i}) \quad (\text{ג})$$

8. הראו שחוק החזקות $e^{zw} = (e^z)^w$ נכשל (כאשר החזקה מוגדרת עם הענף העיקרי של הלוגריתם) ע"י בחירה של z, w מתאימים.

9. פתרו את המשוואה $e^{e^z} = 1$.