טופולוגיה – תרגול 5

<u>תזכורת</u>– **טופולוגיה**

מרחב טופולוגי הוא זוג (X,τ) כך ש- X היא קבוצה כלשהי, ו- τ הוא אוסף של תתי קבוצות של X המקיים:

א. $\varnothing, X \in \tau$;

ב. בהינתן אוסף כלשהו $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של קבוצות מ- τ מתקיים $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \in \tau$;

ג. בהינתן אוסף סופי $\{U_1,\dots,U_n\}$ של קבוצות מ- τ מתקיים $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$.

במקרה זה τ נקראית "טופולוגיה על X", ואיברי τ נקראים "הקבוצות הפתוחות".

<u>הגדרה</u> – **מרחב טופולוגי מטריזבילי**

יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. נאמר ש-(X,τ) מטריזבילי אם קיימת מטריקה d על X המשרה את τ (משמע: מגדירה את אותו אוסף של קבוצות פתוחות).

<u>הערה</u>

יהיו $(X,\tau_1),(Y,\tau_2)$ מ"ט מטריזביליים על ידי המטריקות d_1,d_2 בהתאמה.

להסביר להם שיש קשר בין המטריקה לטופולוגיה (נגדיר מושגים בהמשך...)

א. $x_n \xrightarrow{\tau_1} x$ אמ"מ $x_n \xrightarrow{d_1} x$.

ב. $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ רציפה אמ"מ $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ רציפה.

<u>דוגמה</u> (**מרחב Sierpinski**)

עבור הקבוצה $X=\{a,b\}$ נתבונן באוסף $\tau=\{\varnothing,\{a\},X\}$. קל לבדוק כי (X,τ) הינו מרחב טופולוגי. האם הוא מטריזבילי? לא! נשים לב ש-$\{b\}$ לא פתוח ולכן $\{a\}$ אינה סגורה. אך הראינו שבמרחב מטרי כל נקודון הוא קבוצה סגורה. לכן לא יתכן ש- τ מושרית ממטריקה.

- הערה: זהו המרחב הטופולוגי הקטן ביותר שאינו טריויאלי או דיסקרטי.

הגדרה – **התכנסות במרחב טופולוגי**

יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. נאמר שסדרה $\{x_n\}\subseteq X$ מתכנסת ל- $x\in X$ אם לכל סביבה U של x ($x\in U\in\tau$) קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge n_0$ $x_n\in U$.

דוגמה למרחב לא מטריזבילי

תהי $p\notin\mathbb{R}$ ונסמן $X=\{p\}\cup\mathbb{R}$. נגדיר $\tau=\left\{O\subseteq X : p\notin O \ \vee\ \left|O^c\right|\le\aleph_0\right\}$.

תוכיחו בשיעורי הבית ש-(X,τ) הוא אכן מ"ט.

נוכיח שהמרחב (X,τ) אינו מטריזבילי (בשתי דרכים).

דרך ראשונה

א. נאפיין את הסדרות המתכנסות: תהי $\{x_n\}\subseteq(X,\tau)$. נניח $x_n\to x\in X$.
תהי $U=\left(X\setminus\{x_n\}\right)\cup\{x\}$. מתקיים $x\in U$ ו- $\left|U^C\right|\le\aleph_0$ (מדוע?). לכן $x\in U\in\tau$, כלומר U סביבה של x. מכיוון ש-$x_n\to x$ ו- U סביבה של x , קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge n_0$ $x_n\in U=\left(X\setminus\{x_n\}\right)\cup\{x\}$. אך ניתן לראות שבמקרה זה בהכרח $x_n=x$. משמע, הסדרה קבועה לבסוף.
בנוסף, ניתן להוכיח שבמרחב טופולוגי כל סדרה קבועה לבסוף מתכנסת (בדקו!).

סיכום ביניים: קיבלנו אפיון מלא של הסדרות המתכנסות במרחב (X,τ).

ב. נוכיח כי $\tau\ne\tau_{disc}$.
מתקיים $\tau\subseteq\tau_{disc}=P(X)$ ונראה שאין הכלה בכיוון השני. אכן, $\{p\}\in\tau_{disc}$ ועם זאת $\{p\}\notin\tau$ (כי $\left|\{p\}^c\right|=|\mathbb{R}|>\aleph_0$).

ג. נוכיח ש-(X,τ) אינו מטריזבילי. נניח בשלילה ש-(X,τ) מטריזבילי. אזי קיימת מטריקה d על X שמשרה את τ. לכן מתקיים $x_n\xrightarrow{d}x \iff x_n\xrightarrow{\tau}x$. אבל $x_n\xrightarrow{\tau}x$ אמ"מ הסדרה קבועה לבסוף, והראיתם בתרגיל בית הראשון שבמרחב (X,d_{disc}) זהו בדיוק האפיון של הסדרות המתכנסות. כלומר $d\sim d_{disc}$ ולכן הן מגדירות את

אותו האוסף של קבוצות פתוחות, או: הן משרות את אותה הטופולוגיה.

לכן, $\tau=\tau_{disc}$ בסתירה לסעיף הקודם.

מש"ל

<u>הערה</u>

למעשה ראינו שבניגוד למרחבים מטריים, שבהם התכנסות הסדרות מאפיינת את אוסף הקבוצות הפתוחות בצורה יחידה, במרחבים טופולוגיים כלליים התכנסות הסדרות לא מגדירה בצורה יחידה את הטופולוגיה. שהרי ראינו שתי טופולוגיות <u>שונות</u>, שבשתיהן סדרות מתכנסות אמ"מ הן קבועות לבסוף.

<u>דרך שניה</u>

כזכור, בכל מרחב מטרי ניתן להציג כל קבוצה סגורה כחיתוך בן מניה של קבוצות פתוחות. קל לראות ש-$\{p\}$ היא קבוצה סגורה. נניח בשלילה שהמרחב מטריזבילי. לכן קיימות $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ קבוצות פתוחות כך ש- $\{p\}=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}U_i$. לכל U_i מתקיים $p\in U_i$ ולכן $|U_i^C|\le\aleph_0$. נעבור למשלים: $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}U_i^C=\mathbb{R}$ וקיבלנו ש- $\mathbb{R}$ הוא איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה, וזאת סתירה ($\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$).

מש"ל

<u>טענה</u>

יהיו $\sigma\subseteq\tau$ טופולוגיות על X. ניתן להראות (*בקלות*) שאם $x_n\xrightarrow{\tau}x$ אזי $x_n\xrightarrow{\sigma}x$.

<u>הגדרה</u> – **הישר של Sorgenfrey**

נתבונן ב- $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה T הבאה:

קבוצה היא פתוחה אם היא איחוד של קבוצות מהצורה $[a,b)$ (זהו הישר של סורגנפריי).

<u>הערה</u>

תוכיחו בשיעורי הבית כי הטופולוגיה של סורגנפריי מכילה את הטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$.

<u>תרגיל</u>

הוכיחו שהסדרה $\left\{-\frac{1}{n}\right\}$ אינה מתכנסת בישר של סורגנפריי.

<u>פתרון</u>

נניח בשלילה ש- $-\frac{1}{n}\xrightarrow{T}x$, אזי לפי הטענה (ולפי מה שתוכיחו בבית $-\frac{1}{n}\xrightarrow{\tau}x$. לכן $x=0$. אבל $\left\{-\frac{1}{n}\right\}$ אינה מתכנסת לאפס לפי הטופולוגיה של סורגנפריי, שכן יש סביבה של אפס שאין בה אף איבר מהסדרה (למשל: $[0,1)$).

מש"ל

<u>הגדרה</u> – **רציפות בנקודה במרחב טופולוגי**

יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים, ותהי $f:X\to Y$ פונקציה. תהי $p\in X$ נקודה כלשהי. נאמר ש- f רציפה בנקודה p אם לכל סביבה U של $f(p)$ קיימת סביבה V של p כך ש- $f(V)\subseteq U$.

<u>תרגיל</u>

נתבונן בשתי קבוצות $X=\{a,b\}$, $Y=\{a,b,c\}$ ונגדיר עליהן טופולוגיות: $\tau_Y=\{\varnothing,Y,\{c\}\}$, $\tau_X=\{\varnothing,X\}$. תהי $f:X\to Y$ מוגדרת על-ידי: $f(a)=c,\ f(b)=a$. הוכיחו כי f רציפה ב- b אך לא רציפה ב- a.

<u>פתרון</u>

רציפות ב- b: תהי $U\subseteq Y$ סביבה של $f(b)$. היות ו- $f(b)=a$, בהכרח $U=Y$. לכן ברור שקיימת V שעושה את העבודה ($V=X$).

אי רציפות ב- a: קיימת סביבה U של $f(a)$ שאינה מקיימת את התנאי: $f(a)=c$. נבחר $U=\{c\}$ ואז לכל סביבה V של a מתקיים $f(V)\not\subset U$ (למעשה הסביבה היחידה של a היא X, ו- $f(X)=\{a,c\}\not\subset\{c\}=U$).

מש"ל

<u>הגדרה</u> – **רציפות גלובלית**

יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים ותהי $f:X\to Y$ פונקציה. הפונקציה f רציפה אם מתקיים אחד משני התנאים (השקולים) הבאים:

א. לכל $U\subseteq Y$ פתוחה, גם $f^{-1}(U)\subseteq X$ פתוחה.

ב. לכל $U\subseteq Y$ סגורה, גם $f^{-1}(U)\subseteq X$ סגורה.

<u>טענה</u>

תהי $f:(X,\tau_{cof})\to(Y,\tau_{cof})$ פונקציה לא קבועה. אזי f רציפה אמ"מ לכל $A\subseteq X$ אינסופית גם $f(A)$ אינסופית.

<u>הוכחה</u>

$\Leftarrow$: נניח שהפונקציה רציפה. תהי $A\subseteq X$ אינסופית ונניח בשלילה ש- $f(A)$ סופית. לכל $x\in f(A)$ מתקיים $f^{-1}(\{x\})$ היא קבוצה סופית (כי היא קבוצה סגורה שאינה כל המרחב, שכן הפונקציה אינה קבועה). לכן, מכיוון ש-

$$f^{-1}(f(A))=f^{-1}\left(\bigcup_{x\in f(A)}\{x\}\right)=\bigcup_{x\in f(A)}f^{-1}(\{x\})$$ מתקיים $A\subseteq\bigcup_{x\in f(A)}f^{-1}(\{x\})$.

צד ימין סופי ולכן נקבל סתירה.

$\Rightarrow$: תהי $G\subseteq Y$ סגורה. אם $G=Y$ אזי $f^{-1}(G)=X$ וסיימנו. אחרת, G סופית. נניח בשלילה ש- $f^{-1}(G)\subseteq X$ אינה סגורה, כלומר אינסופית. מההנחה, $f(f^{-1}(G))$ היא אינסופית. מתקיים תמיד $f(f^{-1}(G))\subseteq G$ בסתירה לכך ש- G סופית.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

יהי X מרחב טופולוגי ו-R עם הטופולוגיה האוקלידית. יהיו $f,g:X\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות.

א. הוכיחו כי הקבוצה $A=\{x\in X: f(x)=g(x)\}$ סגורה ב- X.

ב. מצאו דוגמה נגדית לסעיף הקודם כאשר הטופולוגיה על $\mathbb{R}$ אינה אוקלידית.

<u>פתרון</u>

א. נתבונן בפונקציה $(f-g): X \to \mathbb{R}$. זו פונקציה רציפה כהפרש של שתי פונקציות רציפות לתוך $\mathbb{R}$. מתקיים:

$A = \{x \in X : f(x) = g(x)\} = \{x \in X : (f-g)(x) = 0\} = (f-g)^{-1}(\{0\})$.

אבל $\{0\}$ היא קבוצה סגורה ב- $\mathbb{R}$ (כנקודון במרחב מטרי) ולכן A סגורה ב- X כתמונה הפוכה תחת פונקציה רציפה.

ב. יהיו $f, g : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, \tau_{trivial})$ המוגדרות על-ידי:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ x & otherwise \end{cases} \quad , \quad g(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(בשיעורי בית תראו שכל פונקציה למרחב טריוויאלי היא רציפה). כעת:
$A = \{x \in X : f(x) = g(x)\} = \{x \in X : f(x) = 0\} = [0,1)$, והקטע $[0,1)$ אינו סגור ב-R.

מש"ל