אלגברה ליניארית למהנדסים – תרגיל בית 4

תאריך הגשה: 02.05.2017

1. תהי A מטריצה הפיכה. הוכיחו את הטענות הבאות:

1.1. קיימת ל A מטריצה הופכית יחידה.
1.2. A^t הפיכה.
1.3. A^5 הפיכה.

2. תהא $M_{2\times 2}(F) \ni A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. נסמן $\Delta = ad - bc$. הוכיחו כי:

2.1. אם $\Delta \neq 0$ אז A הפיכה ו $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
2.2. אם $\Delta = 0$ אז A אינה הפיכה.

3. תהי A מטריצה ריבועית מסדר n המקיימת: $A^k = \underline{\underline{0}}$, כאשר k מספר טבעי כלשהו.
הוכיחו כי A איננה מטריצה הפיכה.

4. תהי A מטריצה ריבועית. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

4.1. אם $A + A^2$ הפיכה אז A הפיכה.
4.2. אם A הפיכה אז $trace(A) \neq 0$.
4.3. אם $A^2 = A$ אז $A = I$ או A אינה הפיכה.
4.4. אם ב A יש עמודת אפסים אז A אינה הפיכה.

5. עבור המטריצות הבאות A,

5.1. קבעו האם A הפיכה.
5.2. אם A הפיכה:
5.2.1. מצאו את A^{-1}.
5.2.2. הציגו את A ואת A^{-1} כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

6. פתרו את מערכות המשוואות הבאות באמצעות מציאת מטריצה הופכית. אם המטריצה המתאימה למערכת אינה הפיכה, פתרו באמצעות דירוג.

6.1 $\begin{cases} 2x+y-3z=0 \\ 4x-y+5z=6 \\ x+2y-z=-3 \end{cases}$

6.2 $\begin{cases} x-4y+z=5 \\ 2x-y-2z=3 \\ 3x-5y-z=10 \end{cases}$

7. מצאו **במידה וניתן** את המטריצה ההפכית של כל אחת מהמטריצות הבאות:

$$\text{a. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{b. } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c. } \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{pmatrix}, \quad \text{d. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה:

א. יהיו A ו-B מטריצות ריבועיות מסדר n. אם A הפיכה ו-B איננה הפיכה, אזי $A^{-1}B$ גם כן איננה הפיכה.

ב. אם A ו-B מטריצות הפיכות מאותו סדר ו-$A+B\neq \underline{\underline{0}}$, אזי $A+B$ גם כן הפיכה.

ג. תהי A מטריצה ריבועית מסדר n. אם לכל זוג וקטורים שונים: $\vec{x}\neq\vec{y}$

מתקיים כי $A\cdot\vec{x}\neq A\cdot\vec{y}$, אזי A מטריצה הפיכה.

רמז: זכרו כי אם A איננה הפיכה, אזי קיים וקטור עמודה z≠0 כך ש: A·z=0.