מרחב מכפלה פנימית

3 ביוני 2016

מרחב מכפלה פנימית

הגדרה: יהיה Vמרחב וקטורי מעל $K=\mathbb{R}\backslash\mathbb{C}$ אזי מכפלה פנימית הינה פונקציה המתאימה לכל זוג וקטורים $v,u\in V$ סקלאר מ K (כלומר $<,>\colon V\times V\to K$) ומקיימת את האקסיומות הבאות:

1. לינאריות ברכיב הראשון לכל $\alpha\in K,\ v,u,w\in V$
   (א) $\langle\alpha v,w\rangle=\alpha\langle v,w\rangle$
   (ב) $\langle v+u,w\rangle=\langle v,w\rangle+\langle u,w\rangle$
   בקיצור $<\alpha v+u,w>=\alpha<v,w>+<u,w>$
2. הרמנטיות לכל $v,u\in V$ מתקיים $<v,u>=\overline{<u,v>}$.
   (אם $K=\mathbb{R}$ זה אומר סימטריות $<v,u>=<u,v>$)
3. אי־שליליות לכל $v\in V$ מתקיים
   (א) $<v,v>\geq 0$ (מתכונה 2 נובע כי $<v,v>=\overline{<v,v>}$ ולכן $<v,v>\in\mathbb{R}$).
   (ב) $v=0\Leftrightarrow<v,v>=0$

טרמינולוגיה: V יקרא מרחב מכפלה פנימית (ממ"פ)
תכונות:

1. כמעט לינאריות ברכיב השני: $<v,\alpha u+w>=\bar{\alpha}<v,u>+<v,w>$
   הוכחה:

$$
\begin{aligned}
&<v,\alpha u+w>=\overline{<\alpha u+w,v>}=\overline{\alpha<u,v>+<w,v>}\\
&=\bar{\alpha}\overline{<u,v>}+\overline{<u,v>}=\bar{\alpha}<v,u>+<v,w>
\end{aligned}
$$

2. הכללה: $<\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i v_i,\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j w_j>=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_i\bar{\beta}_j<v_i,w_j>$ (תרגיל)
3. לכל $v\in V$ מתקיים $<0,v>=<v,0>=0$
   הוכחה: $<0,v>=<0+0,v>=<0,v>+<0,v>\ \Leftarrow\ <0,v>=0$

דוגמאות למכפלות פנימיות:

1. $V=\mathbb{R}^n$ מעל $\mathbb{R}$ המכפלה הסקלארית מוגדרת להיות
$.< x,y >=< (x_1,\dots x_n),(y_1,\dots y_n) >:= \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = x^t y$

2. $V=\mathbb{C}^n$ מעל $\mathbb{C}$ נגדיר מכפלה פנימית להיות
$.< z,w >=< (z_1,\dots z_n),(w_1,\dots w_n) >:= \sum\limits_{i=1}^{n} z_i \bar{w}_i = z^t \bar{w}$

תרגיל: עבור $n=3$ חשב את המכפלה הפנימית של $v=\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$ עם

(א) $v_1=\begin{pmatrix} -i \\ -4 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

פתרון: $\left\langle (1,i,2),(-i,-4,\sqrt{2}) \right\rangle = 1\cdot i + i\cdot(-4)+2\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}-3i$

(ב) $v_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$

פתרון: $\langle (1,i,2),(1,-i,0) \rangle = 1\cdot 1 + i\cdot(i)+2\cdot 0 = 0$

(ג) $.v_3=\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$

פתרון: $\langle (1,i,2),(1,i,2) \rangle = 1\cdot 1 + i\cdot(-i)+2\cdot 2 = 6$

(ד) $\begin{pmatrix} -4-i \\ -4-12i \\ \sqrt{2}-16 \end{pmatrix}$

פתרון: $\begin{pmatrix} -4-i \\ -4-12i \\ \sqrt{2}-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ -4 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$ ולכן לפי תכונות מכפלה פנימית נקבל:

$$\begin{aligned}
&< (-4-i,-4-12i,\sqrt{2}-16),(1,i,2) >=< v_1+4v_2-8v_3, v >\\
&=< v_1,v > +4 < v_2,v > -8 < v_3,v >=\\
&= (2\sqrt{2}-3i)+4\cdot 0-8\cdot 6 = -48+2\sqrt{2}-3i
\end{aligned}$$

3. $V=\mathbb{R}^{n\times n}$. לכל $A,B\in V$ נגדיר $.\langle A,B\rangle = trace(AB^t)$
טענה: זאת מכפלה פנימית.
הוכחה:

(א)

$$< \alpha A + B, C >= trace((\alpha A + B)C^t) = trace(\alpha AC^t + BC^t)$$
$$= trace(\alpha AC^t) + trace(BC^t) = \alpha trace(AC^t) + trace(BC^t)$$
$$= \alpha < A, C > + < B, C >$$

(ב) $< A, B >= trace(AB^t) = trace((AB^t)^t) = trace(BA^t) =< B, A >$

(ג) משאלה 1 בבוחן נקבל ש $< A, A >= trace(AA^t) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{n}(A_{ks})^2 \geq 0$
ושיוון אמ"מ $A = 0$.

4. מרחב הפונקציות הרציפות $V = \{f : [-1, 1] \to \mathbb{C} \,|\, \text{f is continuous function }\}$ מהקטע $[-1, 1]$ ל $\mathbb{C}$ מעל $\mathbb{C}$.
נגדיר $\langle f, g\rangle := \int\limits_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx$.
טענה: זאת מכפלה פנימית.
הוכחה:

(א)

$$< \alpha f + g, h >= \int\limits_{-1}^{1} (\alpha f(x) + g(x))\overline{h(x)}\,dx =$$

$$\alpha\int\limits_{-1}^{1} f(x)\overline{h(x)}\,dx + \int\limits_{-1}^{1} g(x)\overline{h(x)}\,dx = \alpha < f, h > + < g, h >$$

(ב) $< f, g >= \int\limits_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int\limits_{-1}^{1} \overline{g(x)\overline{f(x)}}\,dx = \overline{\int\limits_{-1}^{1} g(x)\overline{f(x)}\,dx} = \overline{< g, f >}$

(ג) $< f, f >= \int\limits_{-1}^{1} f(x)\overline{f(x)}\,dx = \int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^2\,dx \geq 0$
וקיים שיוויון אמ"מ $f = 0$ (כי f רציפה).

תרגיל: חשב $\langle\sin(x), \cos(x)\rangle$
פתרון: $\langle\sin(x), \cos(x)\rangle = \int\limits_{-1}^{1} \sin(x)\cos(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\sin(2x)}{2}\,dx = 0$.

נורמה מושרית

בהינתן V ממ"פ אזי נגדיר פונקציה הנקראת נורמה מושרית כך:

$$||v|| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

לכל $v \in V$
עובדות: מתקיים כי:

1. $||v|| \geq 0$ ושיוון אמ"מ $v = 0$.
2. $||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||$
3. אי שיוון המשולש: $||v+u|| \leq ||v|| + ||u||$

הערה: מועיל לחשוב על נורמה כפונקציה המודדת אורך/גודל של וקטור.

.

דוגמא: $V = \mathbb{C}^n$ עם מכפלה פנימית $\langle z, w\rangle = z^t \bar{w}$
אזי הנורמה המושרת היא $||z|| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i \bar{z_i}} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |z_i|^2}$.

אי שיוון קושי שוורץ:

יהי V ממ"פ.
אזי לכל $x, y \in V$ מתקיים $| \langle x, y\rangle | \leq ||x|| \cdot ||y||$. כאשר $|| \cdot ||$ הינה הנורמה המושרת.
תרגיל: יהיו $a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$ הוכח: $(a_1 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \dots + a_n^2)$.
פתרון: נסתכל ב $V = \mathbb{R}^n$ עם המכפלה הסקלארית. נגדיר $x = (a_1, \dots a_n)$, $y = (1, \dots, 1)$ אזי לפי אי שיוון קושי שוורץ מתקיים: $| \langle x, y\rangle |^2 \leq ||x||^2 \cdot ||y||^2$ כלומר $|(a_1 + \dots + a_n)^2| \leq n(a_1^2 + \dots + a_n^2)$ ■.

וקטורים ניצבים ומרחב ניצב

הגדרות: יהי Vממ"פ (עם נורמה מושרת). $v, u \in V$ $S \subset V$ תת קבוצה.

1. הזווית בין vל u מוגדרת להיות $\cos(\theta) := \frac{<u,v>}{||u|| \cdot ||v||}$.
2. v, u יקראו ניצבים/מאונכים/אורתוגונאליים אם $< v, u >= 0$ (מסומן $v \perp u$).
3. S תקרא אורתוגונלית אם כל שני וקטורים ב S ניצבים זה לזה. (אם S בסיס הוא יקרא בסיס אורתוגונלי)
4. התת מרחב הניצב ל Sמוגדר להיות $S^\perp := \{v \in V \,|\, \forall u \in S : < v, u >= 0\}$. (תרגיל $S^\perp$ הינו תת מרחב. תרגיל: $S^\perp = [span(S)]^\perp$)
5. v יקרא נורמלי אם $||v|| = 1$ (הגודל שלו 1).
6. עבור $v \neq 0$ התהליך/מעבר $v \to \frac{v}{||v||}$ נקרא נירמול (תרגיל: הגודל של $\frac{v}{||v||}$ הוא 1).
7. S תקרא אורתונורמלית אם S אורתוגנלית וכל וקטור ב Sהוא נורמלי. (אם S בסיס הוא יקרא בסיס אורתונורמלי)

דוגמאות ותרגילים:

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ מאונך ל $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

כי $< \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} >= -2 \cdot 1 + 0 + 1 \cdot 2 = 0$

- הקבוצה $S=\{\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\pi\\0\end{pmatrix}\}$ אותוגונלית (בדיקה ישירה כל שניים מאונכים זה לזה). כיוון ש $\#S=3$ היא בסיס אורתוגנלי של $\mathbb{R}^3$.
- הנרמול של $\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$. הוא המעבר ל
$$\frac{\begin{pmatrix}-2&0&1\end{pmatrix}}{||\begin{pmatrix}-2&0&1\end{pmatrix}||}=\frac{\begin{pmatrix}-2&0&1\end{pmatrix}}{\sqrt{5}}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}}&0&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$
- הוקטור $\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}}&0&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$ נורמלי כי
$||\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}}&0&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}||=\sqrt{(\frac{-2}{\sqrt{5}})^2+(\frac{1}{\sqrt{5}})^2}=1$
- הקבוצה $\{\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\}$ אורתונורמלית.
- תרגיל: תהא $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ אזי $[R(A)]^{\perp}=N(A)$

הוכחה: $(\supseteq)$יהא $x\in N(A)$. $\Leftarrow$ $Ax=0$. כלומר $x=\begin{pmatrix}-&\vec{R_1}(A)&-\\-&\vdots&-\\-&\vec{R_m}(A)&-\end{pmatrix}$

0ולכן לכל i $x\in[R(A)]^{\perp}\Leftarrow<R_i(A),x>=R(A)\cdot x=0$.

$(\subseteq)$ יהא $x\in[R(A)]^{\perp}$. אזי לכל i $Ax=0\Leftarrow<R_i(A),x>=R_i(A)\cdot x=0$.
$x\in N(A)\Leftarrow$.

- תרגיל: יהיו $u=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$, $v=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$. $S=\{u,v\}$ מצא בסיס ל $S^{\perp}$

פתרון: נגדיר $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow S^{\perp}=N(A)$ (לפי תרגיל קודם) . נדרג

$\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. נציב $y=t$ ונקבל $N(A)=\{\begin{pmatrix}-t\\t\\0\end{pmatrix}\}$ ובסיס הוא $\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\}$

תהליך גרם שמידט

יהא V ממ"פ ו־ $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ קבוצה בת"ל. תהליך גרם שמידט מעביר את B אל קבוצה $B^{'}=\{w_1,\dots,w_n\}$ אורתונורמלית.
האלגוריתם:

$$w_1 := v_1$$

$$w_2 := v_2 - \frac{<v_2,w_1>}{||w_1||^2} w_1$$

$$w_3 := v_3 - \frac{<v_3,w_1>}{||w_1||^2} w_1 - \frac{<v_3,w_2>}{||w_2||^2} w_2$$

$$\vdots$$

$$w_i := v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{<v_i,w_k>}{||w_k||^2} w_k$$

כעת $B' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ היא קבוצה אורתוגנאלית וע"י נירמול כל וקטור נקבל את המבוקש.

הערות:

1. בפרט לכל $W \subset V$ תת מרחב קיים בסיס אורתונורמלי (בפרט אורתוגונלי)
2. לכל $1 \le l \le n$ מתקיים $span(\{v_1, \ldots, v_l\}) = span(\{w_1, \ldots, w_l\})$ ולכן $span(B) = span(\{w_1, \ldots, w_l, v_{l+1}, \ldots v_n\})$ כלומר ניתן להפעיל את תהליך גרם שמידט רק על הרישא של הקבוצה בלי לאבד מידע.

דוגמא:

הפוך את הקבוצה $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ לקבוצה אורתונורמלית.

פתרון: נבחר $w_1 = v_1$

$$w_2 = v_2 - \frac{<v_2,w_1>}{||w_1||^2} w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} w_3 &= v_3 - \frac{< v_3, w_1 >}{||w_1||^2} w_1 - \frac{< v_3, w_2 >}{||w_2||^2} w_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(\frac{1}{2})}{(\frac{6}{4})} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כעת $\{w_1, w_2, w_3\}$אורתוגונאלית (בדקו!). ננרמל את הוקטורים

$$||w_1|| = \sqrt{2} \quad ||w_2|| = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad ||w_3|| = \frac{\sqrt{12}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

כעת קבוצה אורתונורמלית.

הערה: אם היינו מחליפים את סדר האברים בבסיס ומתחילים עם $w_1 = v_2$ היינו מקבלים קבוצה אורתונורמלית אחרת.