תרגול כיתה 6 בפיסיקה קלאסית 1

<u>נושאים:</u> מערכות ייחוס לא אינרציאליות וכוח קוריוליס , תנועת טילים, תנועת גופים שמסתם משתנה.

<u>תזכורת לחומר תיאורטי</u>

<u>מערכות ייחוס לא אינרציאליות וכוח קוריוליס</u>

נתונה מערכת ייחוס O ומערכת ייחוס O' שאינה נעה בטרנסלציה ביחס למערכת הראשונה (ראשיתן חופפות) אך מסתובבת במהירות זוויתית $\vec{\omega}$ ביחס אליה. נסמן את תאוצת גוף במערכת O ב- $\vec{a}$ ואת תאוצתו במערכת O' ב- $\vec{a}'$. מתקיים:

$$\vec{a}=\vec{a}'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})+2\vec{\omega}\times\vec{v}'+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$$

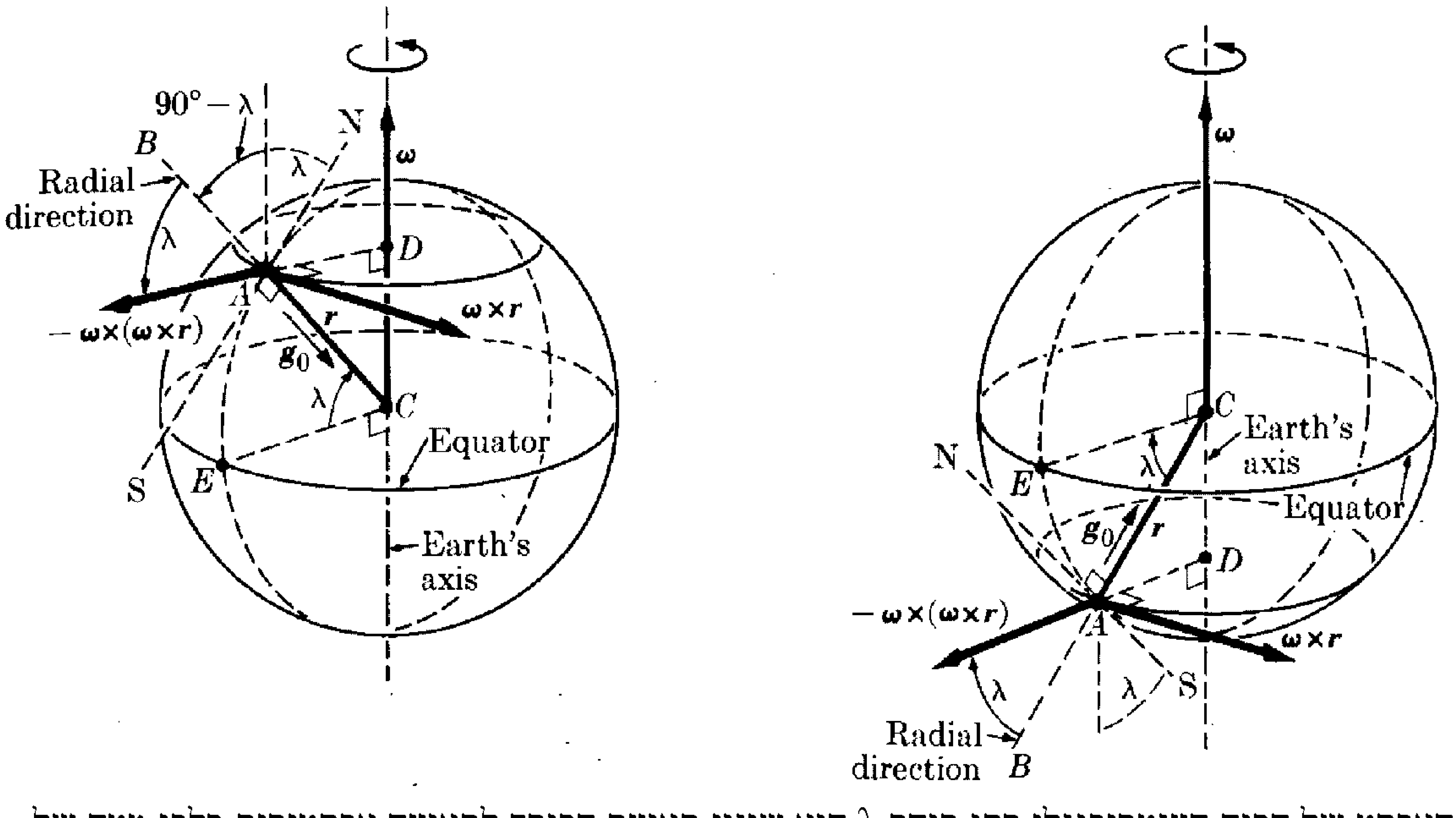
ניתן לתאר את התוספות ל- $\vec{a}'$ באגף ימין ככוחות מדומים הפועלים במערכת ייחוס O' ע"י כפל ב- $(-m)$. האיבר הראשון יהפוך לכוח הצנטריפוגלי, האיבר השני יפוך לכוח קוריוליס, והאיבר השלישי יהפוך לכוח אוילר:

$$\vec{F}_{\text{apparent}}=\vec{F}-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})-2m\vec{\omega}\times\vec{v}'-m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$$

בכדור הארץ כוח אוילר מתאפס מאחר ו- $\vec{\omega}$ הוא בקירוב מעולה קבוע. מתקיים:

$$\omega=7.292\cdot10^{-5}\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

שרטוט של מציאת הכוח הצנטריפוגלי:



האפקט של הכוח הצנטריפוגלי בקו רוחב λ הוא שינוי תאוצת הכובד לתאוצה אפקטיבית כלפי מטה של

$$g=g_0-\omega^2 r\cos^2\lambda$$

בנוסף ישנו כוח מדומה בכיוון דרום/צפון כאשר אנו בחצי כדור הצפוני/דרומי בגודל של

$$F=m\omega^2 r\cos\lambda\sin\lambda$$

לאפקטים אלו יש להוסיף את כוח קוריוליס כדי לקבל את ההשפעה המלאה של סיבוב כדה"א.

<u>תנועת טילים</u>

החוק השני של ניוטון נתון בגרסתו הכללית ע"י

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

כאשר $\vec{F}_{\text{tot}}$ הוא שקול הכוחות על הגוף ו- $\vec{p}$ הוא תנע הגוף. ניתן לבצע אינטגרציה ולקבל את משוואת מתקף-תנע:

$$\Delta\vec{p} = \int \vec{F}_{\text{tot}} dt$$

לטיל הנע במהירות $\vec{v}(t)$ הפולט גז במהירות $\vec{v}_{\text{e}}(t)$ יחסית אליו

$$\vec{F}_{\text{tot}} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_{\text{e}}\frac{dm}{dt}$$

<u>תרגילים</u>

1. קרוסלה אופקית מסתובבת במהירות זוויתית ω נגד כיוון השעון. מכונית זעירה נוסעת על הקרוסלה במעגל שרדיוסו R במהירות זוויתית ω_0 ביחס לקרוסלה. מצאו את מקדם החיכוך המינימלי בין המכונית לקרוסלה שבו המכונית תוכל לנוע במעגל כאשר: א. ω_0 עם כיוון השעון, ב. ω_0 נגד כיוון השעון.

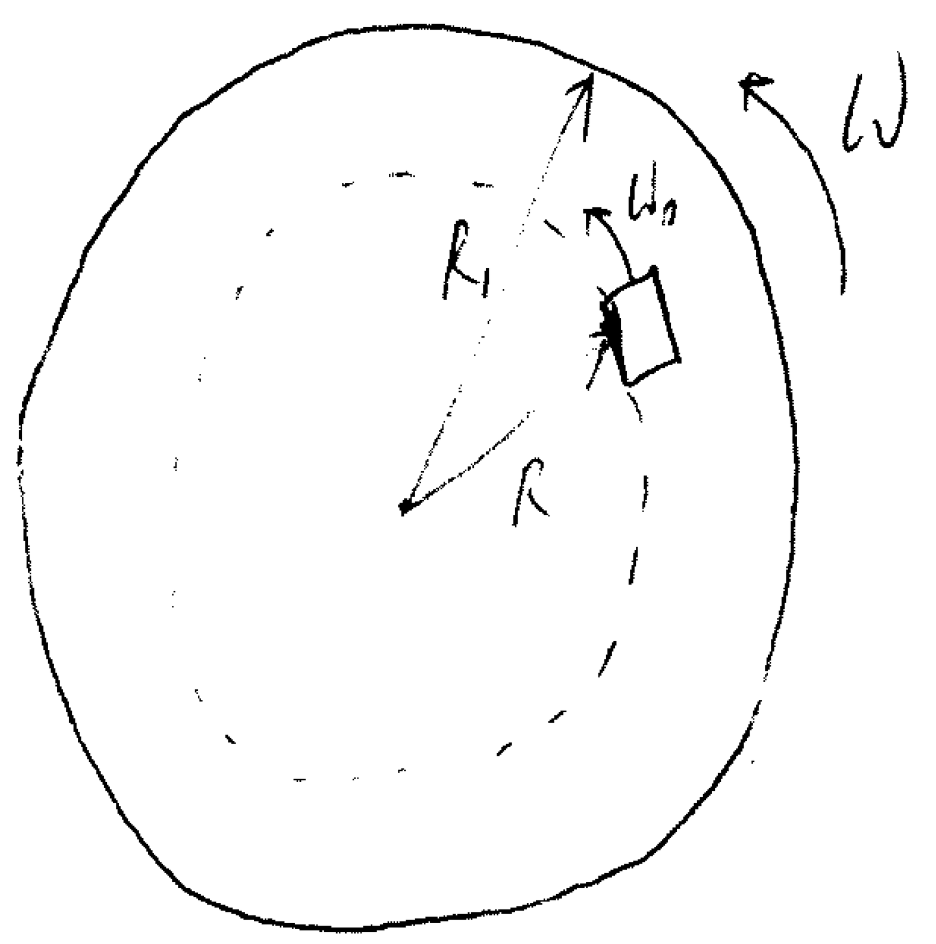
2. מסה m נזרקת במהירות אופקית v_0 מערבה ממגדל בגובה h הנמצא בקו רוחב θ על פני כדור הארץ. הניחו כי כדור הארץ הוא כדור ברדיוס R ($R \gg h$) המסתובב סביב צירו במהירות זוויתית ω, וכי תאוצת הכובד בקטבים היא g_0. בפתרון אין להזניח את האפקטים של התאוצה הצנטריפוגלית וכוח קוריוליס. מותר להזניח את השפעת גובה המסה מפני כדה"א ואת השינוי בקו הרוחב θ. יש לבצע את החישובים במערכת ייחוס הצמודה לבסיס המגדל.

א. מהן משוואות התנועה של המסה?
ב. פתרו את משוואות התנועה עם תנאי ההתחלה הנתונים.
ג. כיצד משתנה הפתרון בגבולות $R\omega^2 \ll g_0$ ו- $v_0\omega \ll g_0$? מה משמעות הקירובים הללו?

3. מטיל שמסתו ברגע $t=0$ היא m_0 נפלט גז כך שמסתו ברגע נתון היא $m(t)=m_0e^{-\alpha t}$. הגז נפלט במהירות u ביחס לטיל שמתחיל את תנועתו ממנוחה על פני כדור הארץ.

א. מהו התנאי לכך שהטיל יעלה למרות כוח הכובד?
ב. מצאו את מהירות הטיל כפונקציה של הזמן.
ג. על הטיל פועל כוח חיכוך עם האוויר $\vec{f} = -\beta m\vec{v}$ כאשר β קבוע חיובי. מצאו את מהירות הגוף כפונקציה של הזמן.
ד. מהי מהירות הטיל לאחר זמן ארוך ($t \to \infty$)?

4. מיכל גלילי שמסתו M וגובהו H עומד על מאזניים. שופכים לאט מים לתוך המיכל כאשר מהירות המים בקצה העליון של המיכל זניחה. שטח החתך של המיכל הוא A, צפיפות המים ρ, והספיקה (קצב זרימה נפחי) Q. מהו גובה הנוזל במיכל כשהוראת המאזניים מקסימלית ומהי הוראת המאזניים במקרה זה?



1. נעזר בקורדינטות גליליות z,θ,r.

נניח $\omega_0>0$. $\theta=\omega t$, $\vec{\omega}=\omega\hat{z}$

על המכונית פועלים 2 כוחות מדומים:

כח קוריוליס: $-2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$

הכח הצנטריפוגלי: $-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$

מהירות המכונית במערכת הייחוס שלה: $\vec{v}'=\omega_0 R\hat{\theta}$

מיקום המכונית במערכת הייחוס שלה: $\vec{r}'=R\hat{r}$

נחשב את הכח הצנטריפוגלי: $-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')=$

$$-m(\omega\hat{z})\times((\omega\hat{z})\times(R\hat{r}))\underset{\hat{z}\times\hat{r}=\hat{\theta}}{=}-m\omega^2R\,\hat{z}\times\hat{\theta}\underset{\hat{z}\times\hat{\theta}=-\hat{r}}{=}m\omega^2R\,\hat{r}$$

נחשב את כח קוריוליס: $-2m\vec{\omega}\times\vec{v}'=$

$$=-2m(\omega\hat{z})\times(\omega_0R\hat{\theta})=+2m\omega\omega_0R\hat{r}$$

נרשום את משוואת הכוחות בציר $\hat{r}$, לא קיימים כוחות בציר $\hat{\theta}$.

$$-m\omega_0^2R\,\hat{r}=f\hat{r}+2m\omega\omega_0R\,\hat{r}+m\omega^2R\,\hat{r}$$

נסמן כח החיכוך $\vec{f}=f\hat{r}$:

$$\frac{\vec{f}}{m}=-R(\omega_0^2+2\omega\omega_0+\omega^2)\hat{r}$$

כדי שלא יחליק: $-\mu g\le\frac{f}{m}\le\mu g$

כאן רלוונטי התנאי $\frac{f}{m}\ge-\mu g$ לכן $\mu\ge\frac{R}{g}(\omega_0^2+2\omega\omega_0+\omega^2)$

במקרה שבו $\omega_0<0$ (המכונית מסתובבת נגד כיוון השעון) מקבלים כח קוריוליס בכיוון ההפוך והתאוצה הצנטריפטלית היא בכיוון ההפוך, מקבלים:

$$\mu\ge\frac{R}{g}(\omega_0^2-2\omega|\omega_0|+\omega^2)$$

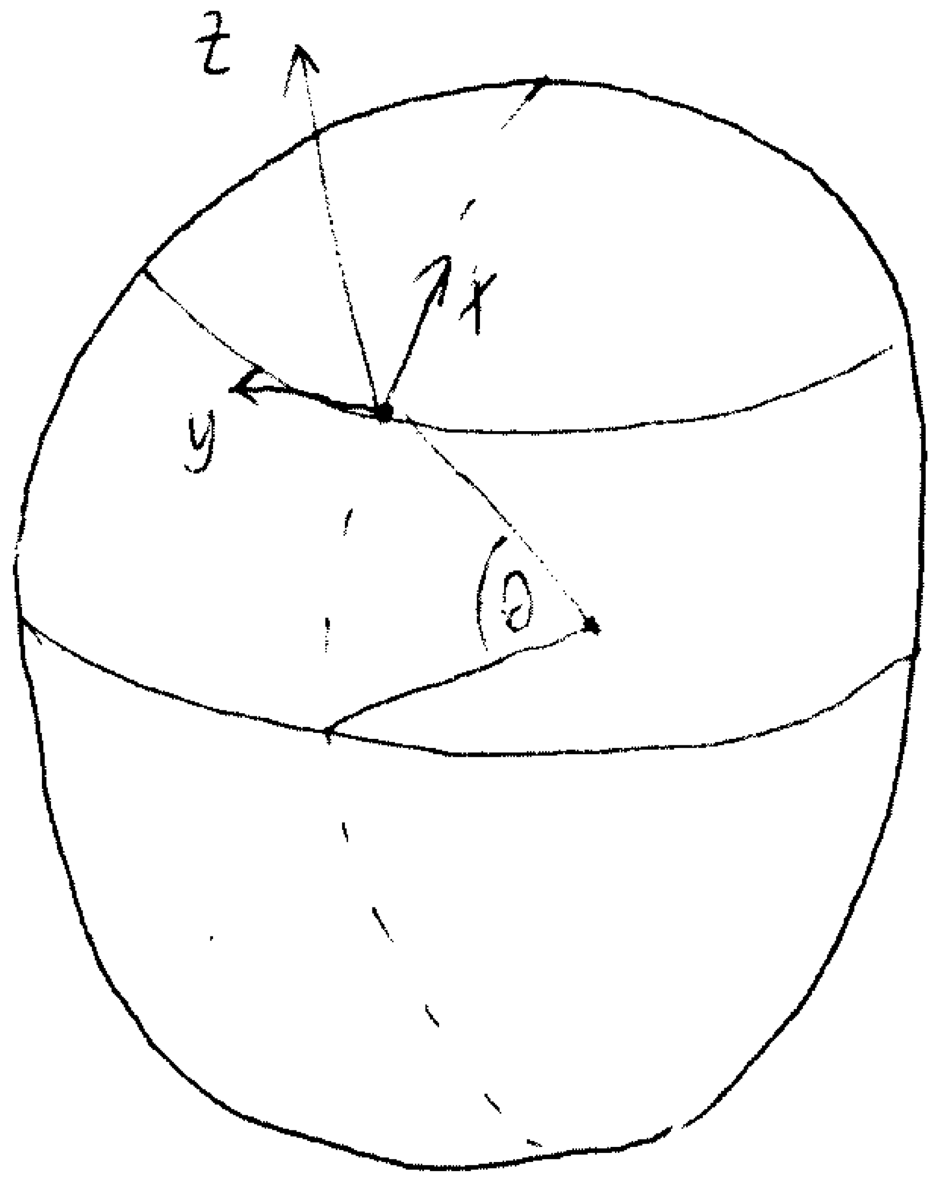
2) א) רכיבי התאוצה האפקטיבית:

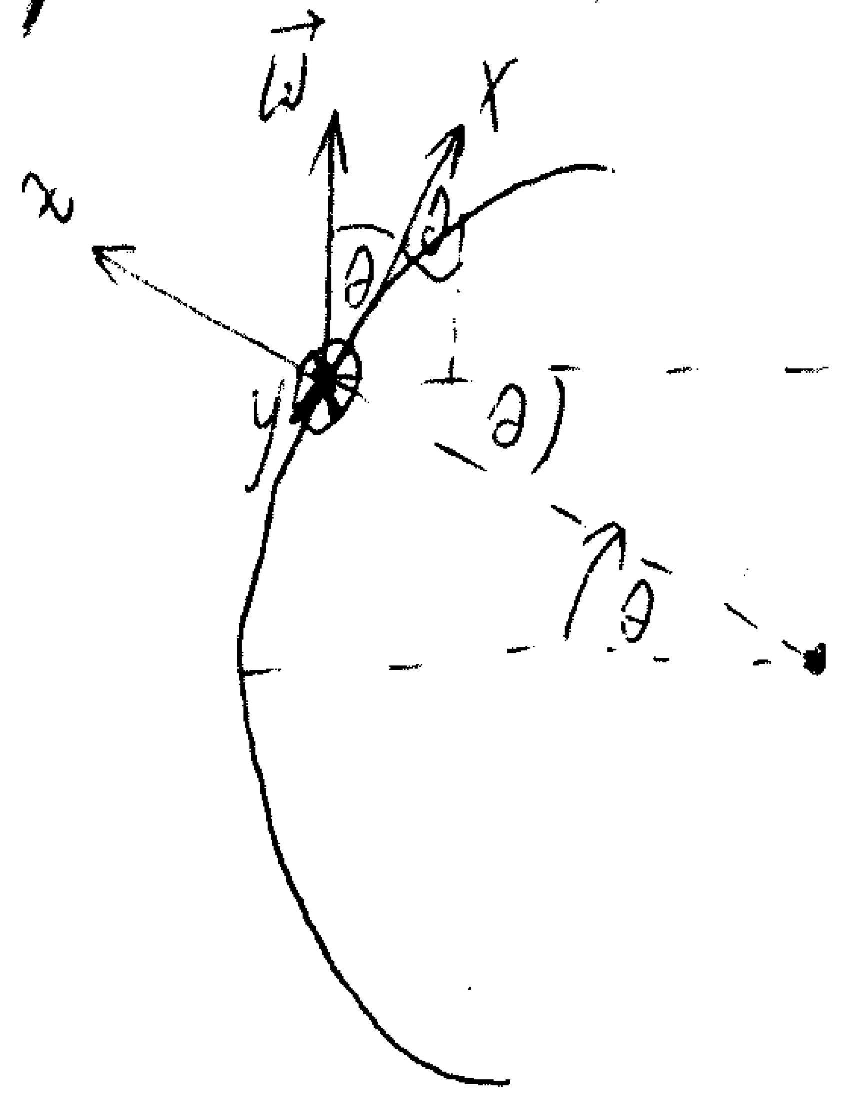
g_0 לכיוון מרכז כדה"א.

$-2\vec{\omega}\times\vec{V}$ קוריוליס.

$-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ תאוצה צנטריפוגלית

נניח כי אנו בחצי הכדור הצפוני. המעבר לחצי הכדור הדרומי הוא אנלוגי (מציבים $0>\theta>-\frac{\pi}{2}$).





מהשרטוט ניתן לראות:

$$\vec{\omega} = \omega\cos\theta\,\hat{x} + \omega\sin\theta\,\hat{z}$$

$$\vec{a}_c = -2\vec{\omega}\times\vec{V} = -2\omega\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \cos\theta & 0 & \sin\theta\\ V_x & V_y & V_z\end{vmatrix} = 2\omega\sin\theta V_y\hat{x} + (2\omega V_z\cos\theta - 2\omega V_x\sin\theta)\hat{y} - 2\omega V_y\cos\theta\,\hat{z}$$

$$\vec{r} = (R+h)\hat{z} \approx R\hat{z}$$

$$\vec{a}_{cent} = -\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = -\vec{\omega}\times\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \omega\cos\theta & 0 & \omega\sin\theta\\ 0 & 0 & R\end{vmatrix} = \omega^2R\cos\theta(-\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{z})$$

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_{cent} - g_0\hat{z} = \dot{V}_x\hat{x} + \dot{V}_y\hat{y} + \dot{V}_z\hat{z}$$

$$\begin{cases}\dot{V}_y = 2\omega(V_z\cos\theta - V_x\sin\theta)\\ \dot{V}_x = \omega(2V_y - R\omega\cos\theta)\sin\theta\\ \dot{V}_z = -g_0 - \omega(2V_y - R\omega\cos\theta)\cos\theta\end{cases}$$

ב. גזירה נוספת של V_y נותנת:

$$\ddot{V}_y = 2\omega(\dot{V}_z \cos\theta - \dot{V}_x \sin\theta)$$

נציב ביטויים ל- $\dot{V}_x$ ו- $\dot{V}_y$ ממשוואות התנועה ונקבל:

$$\ddot{V}_y + \Omega^2 (V_y + U) = 0 \qquad \Omega = 2\omega \qquad U = \frac{g_0 - R\omega^2}{2\omega}\cos\theta$$

נגדיר משתנה $V_y' = V_y + U$, $\ddot{V}_y' = \ddot{V}_y$. המד"ר ל-V_y':

$$\ddot{V}_y' + \Omega^2 V_y' = 0 \Longrightarrow V_y' = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t) \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow V_y = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t) - U$$

תנאי התחלה: $V_z(t=0) = 0$, $V_x(t=0) = 0$, $V_y(t=0) = V_0$

$z(t=0) = h$, $x(t=0) = 0$, $y(t=0) = 0$

נציב $V_y(t=0) = V_0$, $\dot{V}_y(t=0) = 0$ לתוך ביטוי ל- V_y לקבלת:

$A = V_0 + U$

$B = 0$

לסיכום: $V_y(t) = (V_0 + U)\cos(\Omega t) - U$

ע"י אינטגרל: $y(t) = y(t=0) + \int_0^t dt' V_y(t') = \frac{V_0 + U}{\Omega}\sin(\Omega t) - Ut$

ע"י הצבת V_y בביטויים ל- $\dot{V}_x$ ול- $\dot{V}_z$ ואינטגרציה:

$$x(t) = \frac{V_0 + U}{\Omega}\sin\theta(1 - \cos\Omega t) - \frac{1}{2}(2\omega U\sin\theta + \omega^2 R\sin\theta\cos\theta)t^2$$

$$z(t) = h - \frac{V_0 + U}{\Omega}\cos\theta(1 - \cos\Omega t) - \frac{1}{2}\cdot t^2\left(g_0 - 2U\omega\cos\theta - \omega^2 R\cos^2\theta\right)$$

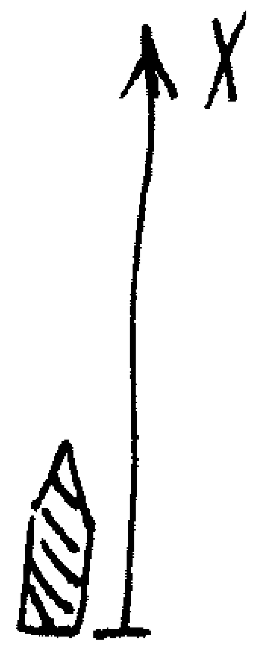
ג. בגבול $R\omega^2 \ll g_0$ גורם ל- U בפתרון להיות בקירוב $U \approx \frac{g_0}{2\omega}\cos\theta$

תנאי זה מתקיים בכדור הארץ כי $R\omega^2 \approx 0.34 \frac{m}{sec^2}$, הפתרון לא משתנה משמעותית.

הקירוב מתאים להזנחה של הכוח הצנטריפוגלי.

הגבול $g_0 \gg V_0\omega$ מתאים להזנחה של כוח קוריוליס. במקרה זה נקבל נפילה חופשית למעט הכוחות שנובעים מהתאוצה הצנטריפוגלית (כח דרומה והקטנה של g האפקטיבי). בגבול זה הביטויים אותם עם $V_0 \to 0$.

ד) קטיה חד מימדית. נתונים:



$m(t) = m_0 e^{-\alpha t}$

$V_e = +u \quad , u<0$

$x(t=0)=0$

$v(t=0)=0$

משוואת הטיל:

$$\vec{F}_{tot} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{V}_e \frac{dm}{dt}$$

אצלנו קטיה חד מימדית ולכן:

$$F_{tot} = m\frac{dv}{dt} - V_e \frac{dm}{dt}$$

$F_{tot} = -mg$ לכן משוואת התנועה היא:

$$-mg = m\frac{dv}{dt} - u\frac{dm}{dt}$$

$$m\frac{dv}{dt} = -mg + u(-\alpha)m_0 e^{-\alpha t} = -mg - \alpha u m$$

א. תנאי להתרוממות הוא תאוצה חיובית בזמן $t=0$:

$$a = \frac{dv}{dt} > 0 \Longrightarrow -g - \alpha u > 0 \Longrightarrow u < -\frac{g}{\alpha}$$

ב. משוואת התנועה היא:

$$\dot{V} = -g - \alpha u$$

ע"י אינטגרציה:

$$V = (-g - \alpha u)t$$

ג. נוסף כוח חיכוך $f = -\beta m v$ לכן. משוואת התנועה:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \alpha u m - \beta m v \Longrightarrow \dot{V} = (-g - \alpha u) - \beta V$$

נבצע הפרדת משתנים לחלק ההומוגני:

$$\frac{dv}{v} = -\beta dt \Rightarrow V_h = Ae^{-\beta t}$$

פתרון פרטי:

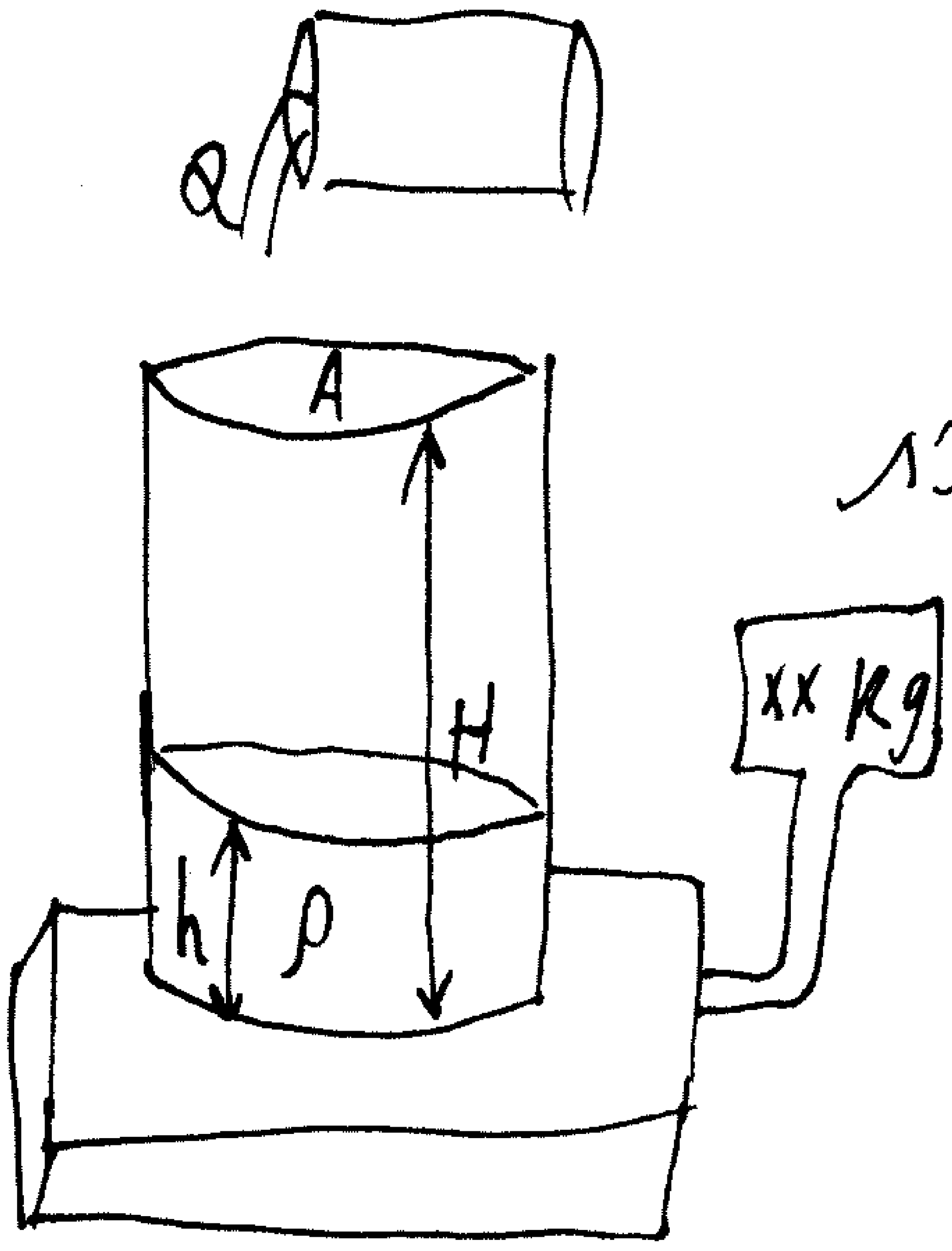
$$V_p = \frac{-g - \alpha u}{\beta}$$

$$V = V_h + V_p = Ae^{-\beta t} + \frac{-g - \alpha u}{\beta}$$

נציב תנאי התחלה $V(t=0)=0$ ונקבל:

$$V(t) = \frac{g + \alpha u}{\beta}\left(e^{-\beta t} - 1\right)$$

ד. ה. $t \to \infty$ מהירות $V(t\to\infty) = -\frac{g+\alpha u}{\beta}$



המאזנים מראים את הכח הנורמלי
הפועל על המיכל
נניח את זמן $t=0$ כשמים מתחילים להגיע לתחתית המיכל.

$$m(t) = M + \rho Q t$$

$$h(t) = \frac{m(t)-M}{\rho A} = \frac{Q}{A}t$$

מהירות המים כשהם מגיעים לפני המים בכלי:

$$V(t) = \sqrt{2g(H-h)}$$

המאזניים מראים את הכח הנורמלי
שמאזן את mg וגם את $\frac{dp(t)}{dt}$ מהמים הנופלים.

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{dm \cdot V(t)}{dt} = \rho Q V(t) = \sqrt{2g(H-h)}\,\rho Q$$

$$N = \sqrt{2g(H-h)}\,\rho Q + (M+\rho Q t)g = \sqrt{2g\left(H-\frac{Q}{A}t\right)}\,\rho Q + (M+\rho Q t)g$$

$$\frac{dN}{dt} = 0 \Rightarrow \sqrt{2g}\,\cancel{\rho Q}\left(\frac{-\frac{Q}{A}}{2\sqrt{H-\frac{Q}{A}t}}\right) + \cancel{\rho Q}g = 0$$

$$-\frac{Q}{A}\sqrt{2}\sqrt{g} = -2g\sqrt{H-\frac{Q}{A}t}$$

$$\frac{Q^2}{A^2}2g = 4g^2\left(H-\frac{Q}{A}t\right)$$

$$\left(\frac{Q^2}{2gA^2}-H\right)\Big/\left(-\frac{Q}{A}\right) = t_1 \Rightarrow \quad h(t_1) = \frac{Q}{A}t_1 = H - \frac{Q^2}{2gA^2}$$

נמצא את חיווי המאזניים כשהערך שמופיע עליהם מקסימלי:

$$N(t_1) = \sqrt{2g(H-h)}\rho Q + (M + \rho Q \frac{H - Q^2/2gA^2}{Q/A})g =$$

$$\sqrt{2g(H-(H-Q^2/2gA^2))}\rho Q + (M + \rho Q \frac{H - Q^2/2gA^2}{Q/A})g =$$

$$\sqrt{2g}\,\frac{Q}{\sqrt{2g}A}\rho Q + Mg + \rho HAg - \frac{(\rho Q^3/2gA^2)g}{Q/A} =$$

$$\frac{\rho Q^2}{A} + Mg + \rho gHA - \frac{\rho Q^2}{2A} =$$

$$Mg + \rho gHA + \frac{\rho Q^2}{2A}$$