תרגיל בית 6

שאלה 1

הראו שהתמורות $(123),(132)$ שיש להן אותו מבנה מחזורים, אינן צמודות ב- A_4.
הראו שהן כן צמודות ב- A_5.

שאלה 2

תהי G חבורה (לא בהכרח סופית) ותהיינה $A,B \triangleleft G$. הוכיחו או הפריכו:

א. $G/A \cong G/B$ אם ורק אם $A=B$.

ב. $G/A \cong G/B$ אם ורק אם $A \cong B$.

ג. אם $G/A \cong G$ אזי A היא תת-החבורה הטריוויאלית.

שאלה 3

תהי G חבורה ויהיו $N,M \triangleleft G$, $H \le G$. נניח כי $H \cap M = H \cap N = \{e\}$.

הוכיחו כי: $HM/M \cong HN/N$.

שאלה 4

תהי $Q_8 = \{1,-1,i,j,k,-i,-j,-k\}$ חבורה עם פעולת כפל המוגדרת ע"י:

$ijk = k^2 = j^2 = i^2 = -1$. חבורה זו נקראת **חבורת הקווטרניונים** (אנחנו מקווים שראיתם את ההגדרה המדוייקת שלה בהרצאה).
השלימו תחילה את לוח הכפל של החבורה, ולאחר מכן ענו על הסעיפים הבאים:

א) מצאו את כל תת החבורות של Q_8.

ב) הוכיחו שכל תת חבורה של Q_8 היא נורמלית.

ג) הוכיחו ש- Q_8 אינה איזומורפית ל- D_4.

שאלה 5

מצאו את כל תת החבורות של S_4 המכילות את תת החבורה $V=\langle(12)(34),(13)(24)\rangle$.

רמז: משפט ההתאמה + העובדה ש- $S_4/V \cong S_3$.

שאלה 6

תהיינה $A,B,C \triangleleft G$ כך ש- $B \subseteq A$. הוכיחו ש- AC/BC היא חבורת מנה של A/B.

שאלת בונוס 1 (10 נקודות)

"המשחק ב-15" הוא שמה של חידה שפרסם החידונאי סם לויד ב-1880. בחידה זו מסודרות לוחיות ממוספרות מ-1 עד 15 בלוח בגודל 4×4, כך שמשבצת אחת נותרת ריקה. הלוחיות מונחות במקומן, למעט הלוחיות 14 ו-15 המוחלפות זו עם זו. לויד הציע פרס כספי למי שיסדר את הלוחיות בחזרה על-יד הזזת לוחית אחת בכל פעם למשבצת הריקה. הראו שהבעיה אינה ניתנת לפתרון.
הדרכה: נסמן את הלוחית הריקה ב-0, כך שמיקום הלוחיות הוא תמורה ב- $S_{\{0,1,\ldots,15\}}=S_{16}$. נסמן ב- $\chi(\sigma)$ את הערך $(-1)^{i+j}$ כאשר σ ממקמת את המשבצת הריקה במקום ה- (i,j). הראו ש- $sign(\sigma)\chi(\sigma)$ אינו משתנה במהלך המשחק.